

博 士 学 位 論 文

人口減少社会における  
公的年金制度の持続可能性に関する一考察

2022 年度

谷川 琴乃

熊本学園大学大学院  
経済学研究科 経済学専攻

## 要旨

現在の日本では少子高齢化が急速に進行しており、総人口の減少幅も年々拡大している。これは、生産年齢人口の減少が今後長期にわたり進むことを意味しており、若年世代が老年世代を支える現在の賦課方式年金を中心とする我が国の社会保障制度の持続可能性は危ぶまれている。

そこで、本研究では、公的年金制度の持続可能性の問題について論じていく。日本の公的年金制度で採用されている賦課方式年金制度とは、それぞれの時点で老年層の年金給付を若年層の保険料で賄う制度である。本研究では、少子高齢化に伴う人口減少社会における公的年金の持続可能性を高める政策として、高所得老年者が賦課方式年金の支え手に加わることを提言する。

世代間の所得移転などを明示的に扱う経済モデルに世代重複モデル (Overlapping Generations Model: 以下 OLG モデル) がある。この OLG モデルは教育や年金問題の分析に幅広く活用されている。しかし、これまでの世代重複モデルでは、賦課方式年金制度の導入は定常状態の資本ストックに負の影響を与えることが知られている。若年世代の保険料負担の増加が貯蓄に負の影響を与えるためである。これに対して本研究では、本来は年金の受け取り側である老年世代にも保険料を負担してもらうことで、若年世代の負担の軽減を図る。これにより、若年世代の貯蓄が増加し、定常状態の資本ストックに正の効果をもたらすことが期待できる。本研究では、この政策が高所得者と低所得者の効用にどのような影響を与えるのか、理論モデルとシミュレーションにより分析を行う。

ところで、資本ストックの動学的挙動を分析する標準的なモデルは、資本蓄積 OLG モデルに組み込んだ Diamond [5] である。その後、Samuelson [8] は Diamond [5] の OLG モデルの枠組みを用いて定常状態での社会厚生を最大化する最適な人口成長率について研究している。

Diamond [5] の OLG モデルの理論的な性質やその拡張については、2000 年代以降に限っても de la Croix and Michel [4], Acemoglu [1], 二神 [12], Yakita [10] など、非常に多くの文献で論じられている。これらのモデルでは、若年世代と老年世代の 2 世代からなる経済を想定し、賦課方式年金制度のもとでの経済の動学分析も行われている。また、これらの研究では賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害することを指摘している。

賦課方式年金制度のもとでの公的年金制度の持続可能性に関しては多くの研究論文がある。Cigno [3] では、少子化で賦課方式年金の持続可能性が弱められることを明らかにしている。Fanti and Gori [7] では、ある条件のもとで出生率の

低下が年金の受給額を増やすことに貢献する可能性を理論的に提示している。Cipriani [6] では、人口高齢化が生じることで、一人当たり年金額は減少することを理論的に示している。Kamiguchi [2] では教育を組み込んだ OLG モデルにおいて、人口高齢化が年金の受給額と社会厚生を高める場合があることを示している。

しかし、上記のすべての研究において、高所得老年者が年金の保険料を負担する政策について、モデル分析は行われていない。ところが現実的には、我が国において高所得老年者が年金の支え手になる仕組みは徐々に実行されつつある。例えば、後期高齢者医療制度では、高所得老年者が高い保険料を負担する仕組みとなっており、高所得者の窓口負担も、それまでの 1 割から 2022 年 10 月には 2 割となっている。つまり、現実的に高所得老年者の社会保障の負担を高める政策は、徐々に導入され始めている。したがって、このような政策の理論的評価を可能にする経済モデルを構築することは、喫緊の課題である。

そこで本研究では、若年世代と老年世代のそれぞれにおいて高所得者と低所得者が存在する 2 世代 OLG モデルを構築し、若年世代に加え、老年世代の中で高い資産所得を得ている人々にも年金の保険料を負担する政策を導入する。これにより、定常状態での 1 人当たり資本ストックが、導入前と比較して増加することを示す。さらに、定常状態における高所得者と低所得者の生涯効用を、高所得老年世代が負担する保険料との関係で求めることにより、以下のことを明らかにする。

- (1) 高所得老年者が負担する保険料が高ければ高いほど、低所得者の生涯効用は増加する。
- (2) 高所得老年者の生涯効用を最大にするような、高所得老年者の保険料が存在する場合がある。
- (3) 高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料が存在し、その水準は(2)の保険料である。
- (4) 人口減少率が大きいほど、高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなる。

本研究では、以上の問題を理論分析とシミュレーションにより明らかにしていく。

第 1 章では OLG モデルの基礎について論じる。ここでは OLG モデルの基本構造を整理するために、年金が存在せず、若年世代と老年世代は貯蓄と投資の関係のみによって繋がる最もシンプルなモデルを提示する。第 1 節では企業の利潤最大化行動と家計の効用最大化から資本ストックの動学式を求める。第 2 節ではレッセフェール競争均衡について述べる。第 3 節では政府による社会厚生 の最大化問題を提示し、社会厚生を最大にする人口成長率を求める。最後に、政

府が人口成長率をその水準に設定すれば、レッセフェール競争均衡において社会厚生を最大化できるというセレンディピティ定理について述べる。

第 2 章では高所得老年者が保険料を負担する年金モデルについて述べる。第 1 章で述べた OLG モデルの家計を高所得者と低所得者に分け、若年世代に加え高所得老年者も年金の保険料を負担するようなモデルを構築する。ただし、ここでは人口成長率をゼロとして考え、この政策が定常状態での資本ストックや高所得者と低所得者の生涯効用にどのような影響を与えるのかを理論的に分析する。さらに、シミュレーション分析では定常状態に対応する資本ストックを具体的に計算し、高所得者と低所得者の生涯効用を求め、現行の賦課方式年金との比較を行う。

第 3 章では第 2 章で示した高所得老年者が保険料を負担する年金モデルの拡張を行う。第 2 章では人口成長率をゼロにした年金モデルを構築したが、第 3 章では人口成長率を高所得者と低所得者にそれぞれ導入したモデルを構築する。このモデルにおいても、定常状態での 1 人当たり資本ストックの変化を明らかにする。

第 4 章では第 3 章で構築したモデルをシミュレーション分析にて確認するためのプログラムの基礎を論じる。ここでは *Maxima* と *Stata* によるプログラムの作成手順と、第 3 章のシミュレーションプログラムについて述べる。

第 5 章では第 4 章で作成したプログラムを用いてシミュレーション分析をした結果について論じる。特に、第 3 章では解析的に求めることができなかった定常状態の資本ストックを、人口成長率と高所得者の保険料との関係でシミュレーションしていく。その結果、特に人口成長率がマイナスとなる領域において高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者と低所得者双方の生涯効用は高くなることを明らかにする。

## 参考文献

- [1] Acemoglu, D. (2009), “Growth with Overlapping Generations,” in *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.
- [2] Akira Kamiguchi (2021), “Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model”, 2021 年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.
- [3] Alessandro Cigno (1993), “Intergenerational transfers without altruism: Family, market and state”. *European Journal of Political Economy* 9(4), 505-518.
- [4] de la Croix, D. and P. Michel (2002), *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge University Press.

- [5] Diamond, Peter A. (1965), "National debt in a neoclassical growth model." *The American Economic Review*: 1126-1150.
- [6] Giam Pietro Cipriani (2014), "Population aging and PAYG pensions in the OLG model", *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256
- [7] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), "Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model", *Journal of Population Economics* 25(3), 955-961.
- [8] Samuelson, Paul A. (1975), "The optimum growth rate for population." *International Economic Review*: 531-538.
- [9] Samuelson, Paul A. (1976), "The optimum growth rate for population: Agreement and evaluations." *International Economic Review*: 516-525.
- [10] Yakita, A. (2017), *Population Aging, Fertility and Social Security*, Springer.
- [11] 小塩隆二, 田近栄治, 府川哲夫 (2016), 『日本の社会保障政策—課題と改革—第2版』一般社団法人 東京大学出版会.
- [12] 二神孝一 (2012), 『動学マクロ経済学—成長理論の発展』、日本評論社.

# 目次

## 序章

### 第1章 世代重複モデルの基礎

はじめに

- 1.1. 企業行動と家計の効用最大化
- 1.2. レッセフェール競争均衡
- 1.3. 社会厚生 of 最大化とセレンディピティ定理

おわりに

付録

### 第2章 高所得老年者が保険料を負担する年金モデル

はじめに

- 2.1. モデル
- 2.2. 企業行動
- 2.3. 資本ストックの動学式と定常状態
- 2.4. シミュレーション分析

おわりに

付録

### 第3章 人口減少社会における公的年金制度の持続可能性と経済厚生分析

はじめに

- 3.1. モデル
- 3.2. 動学分析

おわりに

### 第4章 シミュレーション分析の基礎

はじめに

- 4.1. Maxima によるプログラムの作成手順
- 4.2. Stata によるプログラムでのグラフ作成手順

おわりに

### 第5章 シミュレーション分析

はじめに

- 5.1. シミュレーション分析
- 5.2. 人口減少社会における望ましい高所得老年者の保険料

おわりに

## 終章

## 序章

現在の日本では少子高齢化が急速に進行しており、総人口の減少幅も年々拡大している。これは、生産年齢人口の減少が今後長期にわたり進むことを意味しており、若年世代が老年世代を支える現在の賦課方式年金を中心とする我が国の社会保障制度の持続可能性は危ぶまれている。

そこで、本研究では、公的年金制度の持続可能性の問題について論じていく。日本の公的年金制度で採用されている賦課方式年金制度とは、それぞれの時点で老年層の年金給付を若年層の保険料で賄う制度である。本研究では、少子高齢化に伴う人口減少社会における公的年金の持続可能性を高める政策として、高所得老年者が賦課方式年金の支え手に加わることを提言する。

世代間の所得移転などを明示的に扱う経済モデルに世代重複モデル (Overlapping Generations Model: 以下 OLG モデル) がある。この OLG モデルは教育や年金問題の分析に幅広く活用されている。しかし、これまでの世代重複モデルでは、賦課方式年金制度の導入は定常状態の資本ストックに負の影響を与えることが知られている<sup>1</sup>。若年世代の保険料負担の増加が貯蓄に負の影響を与えるためである。これに対して本研究では、本来は年金の受け取り側である老年世代にも保険料を負担してもらうことで、若年世代の負担の軽減を図る。これにより、若年世代の貯蓄が増加し、定常状態の資本ストックに正の効果をもたらすことが期待できる。本研究では、この政策が高所得者と低所得者の効用にどのような影響を与えるのか、理論モデルとシミュレーションにより分析を行う。

ところで、資本ストックの動学的挙動を分析する標準的なモデルは、資本蓄積を OLG モデルに組み込んだ Diamond [5] である。その後、Samuelson [8] は Diamond [5] の OLG モデルの枠組みを用いて定常状態での社会厚生を最大化する最適な人口成長率について研究している。

Diamond [5] の OLG モデルの理論的な性質やその拡張については、2000 年代以降に限っても de la Croix and Michel [4], Acemoglu [1], 二神 [12], Yakita [10] など、非常に多くの文献で論じられている。これらのモデルでは、若年世代と老年世代の 2 世代からなる経済を想定し、賦課方式年金制度のもとでの経済の動学分析も行われている。また、これらの研究では賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害することを指摘している。

---

<sup>1</sup> Acemoglu [1], de la Croix and Michel [4], Yakita [10], 二神孝一 [12] を参照。

賦課方式年金制度のもとでの公的年金制度の持続可能性に関しては多くの研究論文がある。Cigno [3] では、少子化で賦課方式年金の持続可能性が弱められることを明らかにしている。Fanti and Gori [7] では、ある条件のもとで出生率の低下が年金の受給額を増やすことに貢献する可能性を理論的に提示している。Cipriani [6] では、人口高齢化が生じることで、一人当たり年金額は減少することを理論的に示している。Kamiguchi [2] では、教育を組み込んだ OLG モデルにおいて、人口高齢化が年金の受給額と社会厚生を高める場合があることを示している。

しかし、上記のすべての研究において、高所得老年者が年金の保険料を負担する政策について、モデル分析は行われていない。ところが現実的には、我が国において高所得老年者が年金の支え手になる仕組みは徐々に実行されつつある。例えば、後期高齢者医療制度では、高所得老年者が高い保険料を負担する仕組みとなっており、高所得者の窓口負担も、それまでの 1 割から 2022 年 10 月には 2 割となっている。つまり、現実的に高所得老年者の社会保障の負担を高める政策は、徐々に導入され始めている。したがって、このような政策の理論的評価を可能にする経済モデルを構築することは、喫緊の課題である。

そこで本研究では、若年世代と老年世代のそれぞれにおいて高所得者と低所得者が存在する 2 世代 OLG モデルを構築し、若年世代に加え、老年世代の中で高い資産所得を得ている人々にも年金の保険料を負担する政策を導入する。これにより、定常状態での 1 人当たり資本ストックが、導入前と比較して増加することを示す。さらに、定常状態における高所得者と低所得者の生涯効用を、高所得老年世代が負担する保険料との関係で求めることにより、以下のことを明らかにする。

- (1) 高所得老年者が負担する保険料が高ければ高いほど、低所得者の生涯効用は増加する。
- (2) 高所得老年者の生涯効用を最大にするような、高所得老年者の保険料が存在する場合がある。
- (3) 高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料が存在し、その水準は(2)の保険料である。
- (4) 人口減少率が大きいほど、高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなる。

本研究では、以上の問題を理論分析とシミュレーションにより明らかにしていく。具体的な構成は以下の通りである。まず、第 1 章では OLG モデルの基礎について論じる。ここでは OLG モデルの基本構造を整理するために、年金が存在せず、若年世代と老年世代は貯蓄と投資の関係のみによって繋がる最もシンプルなモデルを提示する。第 1 節では企業の利潤最大化行動と家計の効用最大



化から資本ストックの動学式を求める。第 2 節ではレッセフェール競争均衡について述べる。第 3 節では政府による社会厚生を最大化問題を提示し、社会厚生を最大にする人口成長率を求める。最後に、政府が人口成長率をその水準に設定すれば、レッセフェール競争均衡において社会厚生を最大化できるというセレンディピティ定理について述べる。

第 2 章では高所得老年者が保険料を負担する年金モデルについて述べる。第 1 章で述べた OLG モデルの家計を高所得者と低所得者に分け、若年世代に加え高所得老年者も年金の保険料を負担するようなモデルを構築する。ただし、ここでは人口成長率をゼロとして考え、この政策が定常状態での資本ストックや高所得者と低所得者の生涯効用にどのような影響を与えるのかを理論的に分析する。さらに、シミュレーション分析では定常状態に対応する資本ストックを具体的に計算し、高所得者と低所得者の生涯効用を求め、現行の賦課方式年金との比較を行う。

第 3 章では第 2 章で示した高所得老年者が保険料を負担する年金モデルの拡張を行う。第 2 章では人口成長率をゼロにした年金モデルを構築したが、第 3 章では人口成長率を高所得者と低所得者にそれぞれ導入したモデルを構築する。このモデルにおいても、定常状態での 1 人当たり資本ストックの変化を明らかにする。

第 4 章では第 3 章で構築したモデルをシミュレーション分析にて確認するためのプログラムの基礎を論じる。ここでは *Maxima* と *Stata* によるプログラムの作成手順と、第 3 章のシミュレーションプログラムについて述べる。

第 5 章では第 4 章で作成したプログラムを用いてシミュレーション分析をした結果について論じる。特に、第 3 章では解析的に求めることができなかった定常状態の資本ストックを、人口成長率と高所得者の保険料との関係でシミュレーションしていく。その結果、特に人口成長率がマイナスとなる領域において高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなることを明らかにする。

## 参考文献

[1] Acemoglu, D. (2009), “Growth with Overlapping Generations,” in *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.

[2] Akira Kamiguchi (2021), “Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model”, 2021 年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.

- [3] Alessandro Cigno (1993), "Intergenerational transfers without altruism: Family, market and state". *European Journal of Political Economy* 9(4), 505-518.
- [4] de la Croix, D. and P. Michel (2002), *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge University Press.
- [5] Diamond, Peter A. (1965), "National debt in a neoclassical growth model." *The American Economic Review*: 1126-1150.
- [6] Giam Pietro Cipriani (2014), "Population aging and PAYG pensions in the OLG model", *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256
- [7] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), "Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model", *Journal of Population Economics* 25(3), 955-961.
- [8] Samuelson, Paul A. (1975), "The optimum growth rate for population." *International Economic Review*: 531-538.
- [9] Samuelson, Paul A. (1976), "The optimum growth rate for population: Agreement and evaluations." *International Economic Review*: 516-525.
- [10] Yakita, A. (2017), *Population Aging, Fertility and Social Security*, Springer.
- [11] 小塩隆二, 田近栄治, 府川哲夫 (2016), 「日本の社会保障政策—課題と改革—第2版」一般社団法人 東京大学出版会.
- [12] 二神孝一 (2012), 「動学マクロ経済学—成長理論の発展」、日本評論社.

# 第 1 章 世代重複モデルの基礎

## はじめに

本研究の主題は、世代重複モデル (OLG モデル) を用いて公的年金政策を論じることである。そのためには、OLG モデルの基本構造を明確にする必要がある。そこで、本章では、Momota, Shibata, Sakagami [5] に基づいて、年金が存在せず、若年世代と老年世代は貯蓄と投資の関係のみによって繋がる最もシンプルな OLG モデルを取り上げ、その均衡解を導出する。具体的には、Momota, Shibata, Sakagami [5] に従い、分権的な均衡解であるレッセフェール競争均衡の導出過程とその性質を明らかにする。次に、社会厚生を最大化する状況を人口成長率との関係で求め、最後に、政府がそのような人口成長率を選択することができれば、レッセフェール競争均衡において自動的に社会厚生が最大化されるという「セレンディピティ定理」を考察する。

ところで、Samuelson [3] は Diamond [2] の世代重複モデルの枠組みを用いて定常状態での社会厚生を最大化する最適な人口成長率について研究している。人口成長率の水準を所与として、定常状態での社会計画問題を解き、黄金律配分の中から社会厚生を最大化する人口成長率を選択し、MGG (most-golden golden-rule lifetime state : 社会厚生を最大化するような黄金律配分) を導出している。

さらに、Samuelson [3] は人口成長率が、社会厚生を最大にするという意味で最適にセットされるとき、競争均衡はあらゆる政府の介入なしに MGG を達成することを導出している。Samuelson [3] はこの帰結をセレンディピティ定理と名付けた。

本章の構成は次の通りである。第 1 節では企業の利潤最大化行動と家計の効用最大化から資本ストックの動学式を求める。第 2 節ではレッセフェール競争均衡について述べる。第 3 節では政府による社会厚生最大化問題を提示し、社会厚生を最大にする人口成長率を求める。最後に、政府が人口成長率をその水準に設定すれば、レッセフェール競争均衡において社会厚生を最大化できるというセレンディピティ定理について述べる。

## 1.1. 企業行動と家計の効用最大化

一国全体の生産関数は標準的な新古典派生産関数とし、 $Y_t = F(K_t, L_t)$  とする。ここで、 $K_t$ 、 $L_t$  および  $Y_t$  は、それぞれ一国全体の資本ストック、一国全体の労働投入量、総生産水準を表している。いま、 $y_t \equiv Y_t/L_t$ 、 $k_t \equiv K_t/L_t$  とおくと、一人当たりの生産関数は次のようになる：

$$y_t = f(k_t). \quad (1.1)$$

ここで、 $f'(k_t) > 0$ 、 $f''(k_t) < 0$  である。資本は每期 100%減耗すると仮定する。

本章では、2 期間の世代重複モデルを構築する。そこでは、人々は若年期と老年期の 2 期間生存する。若年期の人々は一単位の労働力を有しており、それを非弾力的に供給する。彼らが老年期になれば引退し、労働供給は 0 となる。 $t$  期における若年期の人々を第  $t$  世代と呼ぶ。第  $t$  世代の人口を  $N_t$ 、人口成長率を  $n$  とおくと  $N_{t+1} = nN_t$  となる。 $n$  は政府により、外生的に与えられる<sup>2</sup>。

第  $t$  世代の効用は次のように定式化する。

$$U_t = U(c_t, d_{t+1}). \quad (1.2)$$

ここで  $c_t$  と  $d_{t+1}$  はそれぞれ若年期の消費、老年期の消費を表している。 $U$  は準凹関数<sup>3</sup>で一次同次性を仮定する。

賃金率を  $w_t$ 、利子率  $r_t$  とおくと、市場で決まる価格を所与として各経済主体が最適化行動を取るレッセフェール経済では、企業の最適条件は次式で与えられる。

$$w_t = w(k_t) \equiv f(k_t) - k_t f'(k_t), \quad r_t = r(k_t) \equiv f'(k_t). \quad (1.3)$$

(証明)

仮定より、一国の生産関数は

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

---

<sup>2</sup> 現代の人口理論では、出生率（人口成長率）は代表的家計の意思決定問題として定式化されているが、セレンディピティ定理が発表された 1970 年代において、人口成長率は政府によって制御が可能であると考えられていた。

<sup>3</sup> 準凹関数とは等高線（無差別にあたるもの）の上側の集合が凸集合であるような関数のこと。神取道宏 [6] を参照。

である。そこで、この両辺を人口  $L_t$  で割り、 $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$ ,  $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$  と置くことで一人当たりの生産関数に書き直すと次のようになる。

$$y_t = f(k_t).$$

この式は、 $\frac{Y_t}{L_t} = f\left(\frac{K_t}{L_t}\right)$  と表すことができるので、一国の GDP と一人当たり生産関数の間には次のような関係がある。

$$Y_t = L_t f\left(\frac{K_t}{L_t}\right). \quad (1.4)$$

$Y_t$  を  $L_t$  で偏微分することで、労働の限界生産力を求め、一人当たりの変数に置き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} &= 1 \cdot f(k_t) + L_t f'(k_t) \frac{\partial \frac{K_t}{L_t}}{\partial L_t} \\ &= f(k_t) + L_t f'(k_t) \frac{\partial K_t L_t^{-1}}{\partial L_t} \\ &= f(k_t) + L_t f'(k_t) \left(-\frac{K_t}{L_t^2}\right) \\ &= f(k_t) - f'(k_t) \frac{K_t}{L_t} \\ &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

を得る。利潤最大化という意味での最適な生産水準のもとでは、賃金率  $w_t$  は労働の限界生産力に等しいので

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \equiv w(k_t)$$

となり、最適化条件のもとでは、賃金率は一人当たり資本ストックの関数として表現される。

次に、(1.4) より  $Y_t$  を  $K_t$  で偏微分することで資本の限界生産力を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} &= L_t f'(k_t) \frac{\partial \frac{K_t}{L_t}}{\partial K_t} \\ &= L_t f'(k_t) \frac{\partial K_t L_t^{-1}}{\partial K_t} \\ &= L_t f'(k_t) \frac{1}{L_t} \\ &= f'(k_t). \end{aligned}$$

企業の最適生産水準のもとで、利子率  $r$  は資本の限界生産力と等しいので、

$$r_t = f'(k_t) \equiv r(k_t)$$

となり、利子率も一人当たり資本ストックの関数として表現される。

Q.E.D.

第  $t$  世代の予算制約式は次式で与えられる。

$$c_t + s_t = w_t, \quad (1.5)$$

$$d_{t+1} = r_{t+1}s_t. \quad (1.6)$$

ここで、 $s_t$  は貯蓄を表す。第  $t$  世代の一階条件は次のとおりである。ただし、 $U_c$  と  $U_d$  はそれぞれ  $c_t$  と  $d_t$  に関する偏微分を示している。

$$U_c(c_t, d_{t+1}) = r_{t+1}U_d(c_t, d_{t+1}). \quad (1.7)$$

(証明)

(1.5) より、

$$s_t = w_t - c_t. \quad (1.8)$$

(1.6) に (1.8) を代入すると

$$d_{t+1} = r_{t+1}(w_t - c_t). \quad (1.9)$$

(1.2) に (1.9) を代入すると

$$U_t = U(c_t, r_{t+1}(w_t - c_t)) \quad (1.10)$$

(1.10) を用いて  $U_t$  を  $c_t$  に関して微分すると、次のようになる。

$$\frac{dU_t}{dc_t} = U_c + U_d \frac{dd_{t+1}}{dc_t}.$$

効用最大化の一階条件より

$$\frac{dU_t}{dc_t} = U_c + U_d(-r_{t+1}) = 0.$$

これより

$$U_c = r_{t+1}U_d$$

を得る。

Q.E.D.

$U$  は一次同次であるので、貯蓄関数は次式で求められる。

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}) = \frac{1}{\theta(r_{t+1})} w_t. \quad (1.11)$$

(証明)

(1.5) より

$$c_t = w_t - s_t. \quad (1.12)$$

(1.12) と (1.6) を (1.7) に代入すると、

$$U_c(w_t - s_t, r_{t+1}s_t) = r_{t+1}U_d(w_t - s_t, r_{t+1}s_t)$$

となる。

$U_c$  と  $U_d$  は 0 次同次なので<sup>4</sup>、各成分を  $\frac{1}{s_t}$  倍しても変わらない。よって、

$$U_c\left(\frac{w_t}{s_t} - 1, r_{t+1}\right) = r_{t+1}U_d\left(\frac{w_t}{s_t} - 1, r_{t+1}\right) \quad (1.13)$$

(1.13) は  $\frac{w_t}{s_t}$  と  $r_{t+1}$  の関数なので、両者の関係を  $\frac{w_t}{s_t} = \theta(r_{t+1})$  で表せる。よっ

て  $s_t = \frac{w_t}{\theta(r_{t+1})}$  を得る。なお、貯蓄率は  $0 < \frac{1}{\theta} < 1$  にならなければならないが、ここでは一般的な関数形で議論を行っているので、貯蓄率がこの条件を満たしているかまでは確認できない。

Q.E.D.

本章の経済には財、資本、労働の 3 つの市場がある。

資本市場と労働市場の均衡条件は、それぞれ  $s_t N_t = K_{t+1}$ 、 $L_t = N_t$  で表される。したがって市場均衡条件は次のようにまとめられる。

$$s_t = nk_{t+1}. \quad (1.14)$$

(証明)

資本市場の均衡条件式  $s_t L_t = K_{t+1}$  の両辺を  $L_{t+1}$  で割ると次式を得る。

$$s_t \frac{L_t}{L_{t+1}} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}.$$

Q.E.D.

(1.11) と (1.14) から動学システムは

---

<sup>4</sup>  $U$  が一次同次であれば、その偏導関数は 0 次同次となる。

$$nk_{t+1}\theta(r(k_{t+1})) = w(k_t), k_0: \text{given}$$

となる。

## 1.2. レッセフェール競争均衡

本節ではレッセフェール経済での均衡状態を定義し、定常状態における効用と人口成長率の関係を求める。

まず、定常状態は  $k_t = k_{t+1} = k$  で定義される。この  $k$  は  $nk\theta(r(k)) = w(k)$  から求められる。 $w_t, r_t$  は(1.3)、 $s_t$  は(1.14)から  $k_t$  の関数なので、定常状態では一定である。 $s_t$  と  $w_t$  が一定ならば(1.5)から  $c_t$  も一定である。 $r_t$  と  $s_t$  が一定であれば(1.6)から  $d_t$  も一定である。したがって、定常状態では  $w_t, r_t, s_t, c_t, d_t$  は時間を通じて一定となることがわかる。そこで、定常状態でのこれらの値を、それぞれ  $w, r, s, c, d$  で表す。

次に、定常状態における効用と人口成長率の関係を求める。(1.2)を  $n$  に関して微分することで、次式を得る。

$$\frac{dU}{dn} = U_c(c, d)(-kf''(k))\frac{1}{r}(r-n)\frac{dk}{dn}. \quad (1.15)$$

(証明)

(1.2)を  $n$  に関して微分すると、次式を得る。

$$\frac{dU}{dn} = U_c \frac{dc}{dn} + U_d \frac{dd}{dn}.$$

(1.7)より  $U_c = rU_d$  なので、 $U_d = \frac{1}{r}U_c$ 。そこで、

$$\frac{dU}{dn} = U_c \frac{dc}{dn} + \frac{1}{r}U_c \frac{dd}{dn} = U_c \left( \frac{dc}{dn} + \frac{1}{r} \frac{dd}{dn} \right). \quad (1.16)$$

(1.5)  $c + s = w$  に(1.14)  $s = nk$  を代入すると、 $c = w - nk$  を得る。これを  $n$  に関して微分すると、次式を得る。

$$\frac{dc}{dn} = \frac{dw}{dn} - \left( k + n \frac{dk}{dn} \right). \quad (1.17)$$

(1.6)  $d = rs$  に(1.14)  $s = nk$  を代入すると、 $d = rnk$  となる。これを  $n$  に関して微分する。

$$\frac{dd}{dn} = \frac{dr}{dn}nk + rk + rn \frac{dk}{dn}.$$

この両辺に  $\frac{1}{r}$  を掛ける。



$$\frac{1}{r} \frac{dd}{dn} = \frac{dr}{dn} \frac{nk}{r} + k + n \frac{dk}{dn} \quad (1.18)$$

(1.16)に(1.17), (1.18)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dn} &= U_c \left( \frac{dw}{dn} - \left( k + n \frac{dk}{dn} \right) + \frac{dr}{dn} \frac{nk}{r} + k + n \frac{dk}{dn} \right) \\ &= U_c \left( \frac{dw}{dn} + \frac{dr}{dn} \frac{nk}{r} \right) \end{aligned}$$

を得る。 $w$  と  $r$  は  $k$  の関数なので、

$$\frac{dU}{dn} = U_c \left( \frac{dw}{dk} \frac{dk}{dn} + \frac{dr}{dk} \frac{dk}{dn} \frac{nk}{r} \right).$$

(1.3)より

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dn} &= U_c \left( f'(k) - \left( f'(k) + kf''(k) \right) + f''(k) \frac{nk}{r} \right) \frac{dk}{dn} \\ &= U_c \left( -kf''(k) \right) \left( 1 - \frac{n}{r} \right) \frac{dk}{dn} \\ &= U_c \left( -kf''(k) \right) \frac{1}{r} (r - n) \frac{dk}{dn}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

これは、レッセフェール経済における人口成長率変化の厚生効果が  $r - n$  と  $\frac{dk}{dn}$  の2つの要素に依存することを示している。Momota, Shibata, Sakagami [5]

では、 $r - n$  と  $\frac{dk}{dn}$  の関係に着目し、レッセフェール競争均衡の安定性について詳細に分析している。

### 1.3. 社会厚生最大化とセレンディピティ定理

本節では、まず政府が  $n$  を所与とした資源制約の下で定常状態の社会厚生を直接最大化する社会計画問題を検討する。次に、社会厚生が最大となる  $n$  が存在することを示し、政府がその  $n$  を設定することで、レッセフェール競争均衡において社会厚生最大化が達成されるというセレンディピティ定理を説明する。

まず、定常状態の資源制約は次式で表される。

$$c + \frac{d}{n} + nk = f(k). \quad (1.19)$$

(1.19)の右辺は一人当たりの生産水準を表し、左辺の  $c$  は若年世代の一人当たり消費、 $\frac{d}{n}$  は人口成長を考慮した老年世代に分配する消費、 $nk$  は一人当たり貯蓄（つまり投資）の大きさを表している。

政府の問題は  $n$  を所与とした(1.19)の制約の下で、効用関数  $U(c, d)$  を最大にする  $c, d, k$  を選ぶことである。Deardorff [1] はこの問題の解を *golden age allocation* と呼んでいる。*golden age allocation* を  $c_g, d_g, k_g$  と表せば、これらは次式で決定される。

$$f'(k_g) = n, \quad (1.20)$$

$$\frac{U_c(c_g, d_g)}{U_d(c_g, d_g)} = n, \quad (1.21)$$

$$c_g + \frac{d_g}{n} + nk_g = f(k_g). \quad (1.22)$$

(証明)

ここでの問題は次のような制約条件付き極値問題として表すことができる。

$$\text{Max. } U = (c_g, d_g)$$

$$\text{s.t. } c_g + \frac{d_g}{n} + nk_g = f(k_g)$$

この問題のラグランジュ関数は、 $\lambda$  を未定乗数として

$$L = U(c_g, d_g) - \lambda \left( c_g + \frac{d_g}{n} + nk_g - f(k_g) \right)$$

となる。このとき、 $c_g$  と  $d_g$  についての一階条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial c_g} = U_c(c_g, d_g) - \lambda = 0 \Leftrightarrow U_c(c_g, d_g) = \lambda \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_g} = U_d(c_g, d_g) - \frac{\lambda}{n} = 0. \quad (1.24)$$

(1.23)を(1.24)に代入し、 $\lambda$  を消去すると

$$U_d(c_g, d_g) - \frac{U_c(c_g, d_g)}{n} = 0$$

を得る。この式を  $n$  について整理すると

$$n = \frac{U_c(c_g, d_g)}{U_d(c_g, d_g)} \quad (1.21)$$

となる。さらに、ラグランジュ関数を  $k_g$  について微分し、ゼロと置くと

$$\frac{\partial L}{\partial k_g} = -n\lambda + \lambda f'(k_g) = 0 \Leftrightarrow n = f'(k_g). \quad (1.20)$$

最後に、未定乗数  $\lambda$  についての一階条件は

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(c_g + \frac{d_g}{n} + nk_g - f(k_g)\right) = 0$$

となり、変形すると

$$c_g + \frac{d_g}{n} + nk_g = f(k_g) \quad (1.22)$$

を得る。

Q.E.D.

(1.20)をみたす内点解が一意に存在すると仮定すると、 $k_g$  は  $n$  の関数となる。この  $k_g$  が与えられると(1.21)、(1.22)を連立することで  $c_g$  と  $d_g$  についての解を一意に求めることができる。したがって、 $c_g$ 、 $d_g$ 、 $k_g$  は、所与の  $n$  に対して、それぞれ  $c_g = c_g(n)$ 、 $d_g = d_g(n)$ 、 $k_g = k_g(n)$  と表すことができる。

Samuelson [3] のこの問題では、実行可能な golden age allocations の中で定常状態での効用関数  $U(c_g(n), d_g(n))$  を最大化する  $n$  を選ぶことになる。彼は、これを *most-golden golden-rule lifetime state* (MGG)と名付けた。

効用関数を最大化するような  $n$  を  $n^s$  と表す。この  $n^s$  は、次式で与えられる<sup>5</sup>。

$$n^s \equiv \operatorname{argmax}_n U\left(f(k_g) - nk_g - \frac{d_g}{n}, d_g\right).$$

ここで、(1.22)より  $c_g = f(k_g) - nk_g - \frac{d_g}{n}$  である。内点解の場合、

(1.20), (1.21)より次式を得る。

$$k_g = \frac{d_g}{(n^s)^2}.$$

(証明)

効用関数  $U(c_g, d_g)$  を  $n$  で微分し、(1.21)を用いると

---

<sup>5</sup> このような効用関数  $U(c_g(n), d_g(n))$  を  $V(n)$  で表すと、 $V$  が MGG のもとでの社会的厚生関数となる。

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dn} &= U_c c_g'(n) + U_d d_g'(n) \\
&= U_c \left[ c_g'(n) + \frac{U_d}{U_c} d_g'(n) \right] \\
&= U_c \left[ c_g'(n) + \frac{1}{n} d_g'(n) \right]. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

ここで予算制約式(1.22)の両辺に  $c_g = c_g(n)$ 、 $d_g = d_g(n)$ 、 $k_g = k_g(n)$  の関係を用いると、

$$c_g(n) + \frac{d_g}{n} + nk_g(n) = f(k_g(n)).$$

この式の両辺を  $n$  に関して微分すると

$$\begin{aligned}
c_g'(n) + \frac{d_g'(n)n - d_g(n)}{n^2} + k_g(n) + nk_g'(n) &= f'(k_g(n))k_g'(n) \\
\Leftrightarrow c_g'(n) + \frac{d_g'(n)}{n} - \frac{d_g(n)}{n^2} + k_g(n) + nk_g'(n) &= f'(k_g(n))k_g'(n) \\
\Leftrightarrow c_g'(n) + \frac{d_g'(n)}{n} = f'(k_g(n))k_g'(n) + \frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n) - nk_g'(n) \\
&= k_g'(n) \left[ f'(k_g(n)) - n \right] + \frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n)
\end{aligned}$$

$[f'(k_g(n)) - n]$  は(1.20)より0になるので

$$c_g'(n) + \frac{d_g'(n)}{n} = \frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n). \tag{1.26}$$

(1.26)を(1.25)に代入すると、

$$\frac{dU}{dn} = U_c \left[ \frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n) \right].$$

内点解の条件から

$$\frac{dU}{dn} = U_c \left[ \frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n) \right] = 0. \tag{1.27}$$

限界効用は正  $U_c > 0$  なので、内点解の条件は(1.27)より

$$\frac{d_g(n)}{n^2} - k_g(n) = 0$$

と同値である。これを变形することで次式を得る。

$$k_g(n) = \frac{d_g(n)}{n^2}.$$

Q.E.D.

このとき次の定理が成立する<sup>6</sup>。

### 【セレンディピティ定理 (Samuelson's Serendipity Theorem)】

あらゆる政府の介入なしに、競争均衡は人口成長率  $n^s$  の下で自動的に MGG を達成する。

この定理は政府が人口成長率を最適人口成長率にセットすれば MGG が達成されることを述べている。つまり、政府は  $n = n^s$  を達成するように経済を誘導するだけで、思いがけず、MGG 配分が達成されるのである。英語のセレンディピティの意味は「思いがけず幸運を得る」という意味である。

### おわりに

本章では、Momota, Shibata, Sakagami [5] に基づいて、年金が存在せず、若年世代と老年世代は貯蓄と投資の関係のみによって繋がる最もシンプルな OLG モデルを取り上げ、その均衡解を導出した。具体的には、Momota, Shibata, Sakagami [5] に従い、レッセフェール経済における貯蓄関数を導出し、レッセフェール経済の定常状態を明らかにした。次に、社会厚生を最大化する状況を人口成長率との関係で求め、最後に、政府がそのような人口成長率を選択することができれば、レッセフェール競争均衡において自動的に社会厚生が最大化されるという「セレンディピティ定理」を考察した。

最後に課題を述べる。本章では、生産関数と効用関数を特定化していなかった。そのため、セレンディピティ定理が成立するためのパラメータの条件を求めることができなかった。また、MGG の安定性についても議論する必要がある。MGG 均衡を達成しようと、政府がそれに対応する人口成長率を設定しても、均衡が不安定であればその(理想的な)MGG 均衡は達成されないためである。したがって、MGG の安定条件を論じる必要がある。最後に、セレンディピティの議論では、政府が人口成長率を最適な水準にコントロールできるとしているが、現実にはそれは極めて困難である。この問題を論じるためには、人口成長率や出生率の内生的な決定を議論する必要がある。

---

<sup>6</sup>上記で求めた  $k_g$  は一階条件から得られたものである。したがって Deardorff [1] が指摘するように厚生関数を最大にするような  $k$  の値ではなく、最小値に対応する可能性がある。

## 参考文献

- [1] Deardorff, Alan V. (1976), "The optimum growth rate for population: comment." *International Economic Review*: 510-515.
- [2] Diamond, Peter A. (1965), "National debt in a neoclassical growth model." *The American Economic Review*: 1126-1150.
- [3] Samuelson, Paul A. (1975), "The optimum growth rate for population." *International Economic Review*: 531-538.
- [4] Samuelson, Paul A. (1976), "The optimum growth rate for population: Agreement and evaluations." *International Economic Review*: 516-525.
- [5] Akira Momota, Tomoya Sakagami, Akihisa Shibata (2019), "Reexamination of the Serendipity Theorem from the stability viewpoint." *Journal of Demographic Economics*: 433-470.
- [6] 神取道宏 (2014), 「ミクロ経済学の力」 日本評論社.

## 第2章 高所得老年者が保険料を負担する年金モデル

### はじめに

日本の社会保障制度には様々な問題が指摘されているが、その中でも賦課方式年金制度が抱える問題として少子高齢化の進展に伴う世代間格差と年金制度の持続可能性の問題があげられる。ここでの世代間格差の問題とは、少子高齢化が進むことで、若年世代の1人当たり年金負担が増加してしまうという問題である。

特に日本では、2022年に少子高齢化問題の大きな転換点を迎える。なぜならば、いわゆる「団塊の世代」の先頭が75歳に到達するためである。つまり、2022年以降、少子高齢化の進行が加速するため、現行の公的年金制度の持続可能性は一層危惧されることになる。

この問題に対処するために、岸田内閣では「能力に応じて皆で支える社会保障制度」の構築を提唱している<sup>7</sup>。特に、年齢ではなく能力に応じて年金制度の支え手に回ってもらうことを検討している。すでに後期高齢者医療制度では、高所得老年者が高い保険料を負担する仕組みとなっており、高所得老年者の窓口負担も2022年10月には2割となった。しかし、高所得老年者が保険料を負担する仕組みを分析する経済モデルはほとんど存在しない。

そこで本章では賦課方式年金制度のもと、年金負担の世代間格差を是正し、年金制度が長期的に持続可能となる新しい年金政策を提案する。具体的には、若年世代に加えて、高い資産所得を得ている老年世代も保険料を負担するというものである。資産を保有する老年世代が利子所得の範囲内で保険料を負担することで若年世代の負担が減り、世代間格差は縮小する。さらに、この仕組みのもとで動学的に実行可能領域内の定常状態に経済が収束すれば、この年金制度は持続可能であることになる。

そこで本章では、この政策が資本ストックに与える影響を明らかにする。そのために、若年期に高所得者と低所得者が存在する世代重複モデル（Over-Lapping Generations model：以下 OLG モデルと呼ぶ）を構築する。モデルでは若年期に高所得者であった者は、老年期には高い資産所得を得ることになる。このモデル

---

<sup>7</sup> 岸田首相は2021年10月24日のNHKにおいて「日本の社会保障制度は従来は年齢で区切っていたが、これからの時代は能力に応じ、支え手に回ってもらう。全世代で社会保障を支える基本的な考え方を進めていかなければならない」と述べている。

を用いて、当該年金政策の導入が資本ストックの動学的挙動と定常状態に与える影響を分析する。その結果、年金負担の世代間格差を是正することで、つまり、高い資産所得を得ている老年世代の保険料を高くすることで、安定的な性質を持つ定常状態の資本ストック水準はより大きくなることを明らかにする。

さらに、定常状態のシミュレーション分析を行うことで、高所得者の生涯効用を最大にする老年世代の保険料が存在する場合があることを明らかにする。この保険料水準は高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料であることも確認する。

ところで、年金制度が資本ストックの動学的挙動に与える影響を分析する標準的なモデルは、資本蓄積を OLG モデルに組み込んだ Diamond [7] に基づいている。このモデルの特性についての研究とその拡張については、2000 年代以降に限っても de la Croix and Michel [6]、Acemoglu [1]、二神 [14]、Yakita [13] など、非常に多くの文献で論じられている。特に、これらのモデルを年金制度に応用した研究では、若年世代と老年世代の 2 世代からなる経済を想定し、賦課方式年金制度のもとでの経済の動学分析が行われている。その際、これらの研究では賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害することを指摘している。

賦課方式年金制度の持続可能性に関しては、少子高齢化との関係で多くの研究論文がある。Cigno [4] では、少子化で賦課方式年金の持続可能性が弱められることを明らかにしている。Fanti and Gori [11] では、ある条件のもとで出生率の低下が年金の受給額を増やす可能性を理論的に示している。Cipriani [8] では、人口高齢化に伴い、一人当たり年金額が減少することを理論的に示している。これに対して本章では、人口が一定の状況で高所得老年者を公的年金の支え手に加えても、安定的な定常状態が存在する、すなわち、公的年金制度が持続可能となることを明らかにする。この帰結は少子高齢化が進む社会では一層頑強性を高めることが予想される。なぜならば、少子高齢化によって支え手に回る高齢者が増加するためである。

ところで、賦課方式年金制度を扱ったモデルの多くは同一世代内での同質的な個人が想定されているため、そこに高所得家計や低所得家計といった所得の異質性は仮定されていない。

これに対して、教育の所得への効果を論じる研究では、所得格差を扱った OLG モデルが数多く存在する。なかでも、Glomm and Ravikumar [9]、Dahan and Tsiddon [5]、Sakagami and Matsuo [12] などでは、教育制度と所得格差に注目した研究が行われている。その中で用いられるモデルは、教育の選択を行う若年世代と、生産活動を行う壮年世代からなる 2 世代 OLG モデルである。特に、Sakagami and Matsuo [12] では、高所得家計と低所得家計が登場し、若年期に教育を選択した者は一定の確率のもと次期に高所得者となるという構造になっている。そのうえ



で、各家計が教育費を負担する私教育制度と、政府が税収で教育費を負担する公教育制度の効果を分析している。また、Kamiguchi [2] では、教育を組み込んだ OLG モデルにおいて、人口高齢化が年金の受給額と社会厚生を高める場合があることを示している。

本章では、高所得の老年者にも年金の保険料を拠出してもらうために、このような所得格差を賦課方式年金モデルに組み込むことにする。モデルでは、若年期の高所得家計と低所得家計の存在を外生的に与えることで、内生的に決まる貯蓄に違いが生じ、若年期に高所得であった家計は老年期に高い資産所得を得ることになる。そのような老年世代が、同じ期の若年世代とともに保険料を支払い、年金制度を支える状況を想定する。

モデル分析では資本ストックの動学的な挙動と、安定的な定常状態の存在を確認する。その結果、安定的な定常状態における資本ストックの水準は、老年者が保険料を負担しない現行の賦課方式よりも大きくなることを明らかにする。高所得老年者も年金の保険料を負担する場合、高所得者は将来の保険料に備えて若年期に貯蓄を増やす。その結果、資本ストックも増加するのである。この帰結は、賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害するという従来 of 帰結を修正するものである。

このモデルでは、定常状態の資本ストックの水準を数学的に求めることが難しい。そのため、資本ストックの水準に対応して決定される消費や、若年期の消費と老年期の消費から得られる生涯効用についてはシミュレーション分析で解明する。ここで、高所得老年者が年金の保険料を負担することは、老年者から若年者へのトランスファーを通じた年金負担の平準化効果だけでなく、高所得老年者から低所得老年者への「世代内の」トランスファーにより、低所得者の生涯効用を押し上げる効果も持つ。このため、高所得老年者の保険料を高めると、低所得者の生涯効用は上昇し続けることになる。一方、高所得者の生涯効用は、保険料の増加との関係で単調に減少するわけではないことも明らかになる。特に、保険料が小さな領域では逆に高所得者の生涯効用も増加する。なぜならば、高所得老年者が保険料を負担することで、高所得の若年世代は保険料負担が減少し、消費が増加する。一方で、高所得の老年世代は保険料を負担するため、消費は減少する。このとき、高所得老年者の保険料負担が小さい領域では、若年世代の消費の増加効果が老年世代の消費の減少効果を上回るため高所得者の生涯効用も増加するのである。

本章の構成は次の通りである。まず第 1 節では若年世代に加え高所得の老年者も賦課方式年金の保険料を負担するような 2 世代重複モデルを構築し、高所得者、低所得者それぞれの最適な貯蓄関数を導出する。第 2 節では企業の利潤最大化行動を定式化する。第 3 節で資本ストックの動学式から定常状態を求め、

老年者が新たに保険料を負担することが定常状態にどのような影響を与えるのかを分析する。第 4 節ではシミュレーション分析を行う。最後にまとめを述べる。

## 2.1. モデル

本章では各期に若年者と老年者が存在する世代重複モデルを構築する。さらに、若年期に高所得者と低所得者の存在を仮定する(図 2.1 参照)。 $t$  期に誕生した世代を  $t$  世代と呼ぶと、 $t$  世代の生涯の予算制約は、高所得者と低所得者とにわけて考える必要がある。

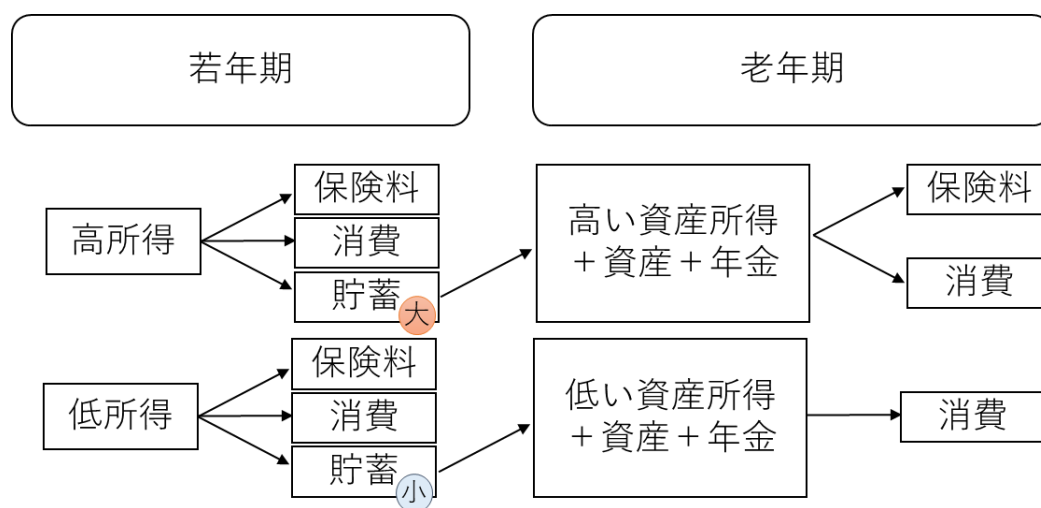


図 2.1 : 各期における家計の収支

まず、高所得者の予算制約式から考えてみる。彼らは若年期に高い賃金を得て、それを消費、貯蓄、年金保険料の支払いにあてる。このモデルでは、若年世代だけでなくすべての保険料を拠出するのではなく、その期に高い資産所得を得ている老年者も保険料の支払いを行うものとする。つまり、 $t$  期において支払う保険料は、その期の若年世代である  $t$  世代の全員と、老年世代である  $t-1$  世代の一部が支払うことになる。

$t$  世代が老年期となる  $t+1$  期では、若年期に高所得者であった老年者は大きな資産所得を得る(詳しくは後述する)。彼らは資産所得と年金をすべて消費と保険料の支払いにあてる。支払われた保険料はすべて老年世代に年金として再分配される。

$t$  世代の高所得者の予算制約を若年期 ( $t$  期) と老年期 ( $t+1$  期) で表現

すると、それぞれ次の(2.1), (2.2)のようになる。

$$c_t^{yh} + s_t^h + \left( d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \right) = w_t^h, \quad (2.1)$$

$$c_{t+1}^{oh} + d^o = (1 + r_{t+1})s_t^h + \frac{(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y) \left( d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o}. \quad (2.2)$$

ここで、(2.1)の  $c_t^{yh}$  は  $t$  期の若年者(young)で高所得者(タイプ  $h$ )の消費、 $s_t^h$  は  $t$  期の若年者で高所得者の貯蓄である。 $d$  と  $d^o$  は政府が設定する非負の定数である。 $d$  は、「もし若年者だけが保険料を負担するとした場合」の若年者の1人当たりの保険料であり、 $d^o$  は若年期に高所得を得ていた老年者(old)が支払う1人当たりの保険料である。 $H_t^o$  は  $t$  期の老年者で高い資産所得を得ている者の人口、 $H_t^y$  は  $t$  期の若年者で高所得者の人口、 $L_t^y$  は  $t$  期の低所得の若年者の人口、 $w_t^h$  は  $t$  期に高所得を得ている若年者の所得(賃金)である。(2.1)の左辺第3項は、高所得老年者も年金の保険料を負担する場合の、 $t$  期の若年世代の1人当たり保険料の支払額である。なぜならば、 $t$  期の老年者の保険料支払い  $H_t^o d^o$  を  $t$  期の若年期全体の人口  $H_t^y + L_t^y$  で割った額、すなわち  $t$  期の若年者の間で均等に再分配した額が  $\frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o$  となるからである。この額を  $d$  から引いた値が、本モデルでの若年者の保険料の支払額になる。

(2.2)の  $c_{t+1}^{oh}$  は  $t+1$  期の老年者で高所得者(タイプ  $h$ )の消費、 $r_{t+1}$  は  $t+1$  期の利子率、 $H_{t+1}^y$  は  $t+1$  期の高所得の若年者人口、 $L_{t+1}^y$  は  $t+1$  期の低所得の若年者人口、 $H_{t+1}^o$  は若年期に高所得だった  $t+1$  期の老年者の人口である。(2.2)の右辺第2項は高所得老年者が受け取る年金額を表している。その分子部分は若年世代が1人当たりで支払う年金保険料に若年人口を乗じた額  $(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y) \left( d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right)$  と、 $t+1$  期の高所得の老年者が支払う保険料の総額  $H_{t+1}^o d^o$  を合計した値である。この拠出額を  $t+1$  期の老年者人口  $H_{t+1}^o + L_{t+1}^o$  で割り、老年者1人当たりの年金受取額を求めている。

次に、若年期の低所得者が支払う保険料は若年期の高所得者の保険料と同一であると仮定する。また、低所得の老年者は保険料の支払いを行わないと仮定する。このとき、低所得者の予算制約を若年期と老年期で表現すると、それぞれ(2.3)、(2.4)のようになる。

$$c_t^{yl} + s_t^l + \left( d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \right) = w_t^l, \quad (2.3)$$

$$c_{t+1}^{ol} = (1 + r_{t+1})s_t^l + \frac{(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y) \left( d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o}. \quad (2.4)$$

ここで、(2.3)の  $c_t^{yl}$  は  $t$  期の若年者(young)で低所得者(タイプ  $l$ )の消費、 $s_t^l$  は  $t$  期の若年者で低所得者の貯蓄、 $w_t^l$  は  $t$  期の低所得者の所得である。(2.3)式左辺第3項にある保険料は(2.1)と同じである。これに対して、(2.4)式左辺の  $c_{t+1}^{ol}$  は  $t+1$  期の老年者(old)で低所得者(タイプ  $l$ )の消費である。(2.4)式右辺第2項の年金の受取額は(2.2)と同じである。

以下では、 $d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \leq \min(w_t^l, w_t^h)$  かつ  $d^o \leq r_{t+1} s_t^h$  という制約を仮定する。これは年金の保険料が所得や利子所得を上回らないことを意味している。また、以降の分析では各世代の人口を1に基準化し、人口は成長しないものと仮定する。したがって、各期の若年者と老年者を合わせた総人口は常に2となる。さらに、低所得者と高所得者の人口(したがって人口比)も一定であると仮定する。すなわち、

$$H_t^y = H_{t+1}^y = H_t^o = H_{t+1}^o = H(\text{const.}), \quad L_t^y = L_{t+1}^y = L_t^o = L_{t+1}^o = L(\text{const.}).$$

以下の議論では、 $H < L$  を仮定する。また、世代人口に占める高所得者の比率を

$$\frac{H}{H+L} = v \text{ と置くと、 } \frac{L}{H+L} = 1 - v \text{ であることがわかる。}$$

この仮定のもとでは、老年者が受け取る年金額は  $d$  となる。なぜならば、(2.2)と(2.4)の右辺第2項に出てくる老年者が受け取る年金額は、 $H_{t+1}^y +$

$$L_{t+1}^y = H_{t+1}^o + L_{t+1}^o = 1 \text{ なので、 } \forall t \geq 0, \frac{(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y) \left( d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o} = d \text{ と}$$

なる。

以上の点に注意すれば、(2.1)～(2.4)の予算制約式は次のように書き換えることができる。

$$c_t^{yh} + s_t^h + (d - v d^o) = w_t^h, \quad (2.5)$$

$$c_{t+1}^{oh} + d^o = (1 + r_{t+1})s_t^h + d, \quad (2.6)$$

$$c_t^{yl} + s_t^l + (d - v d^o) = w_t^l, \quad (2.7)$$

$$c_{t+1}^{ol} = (1 + r_{t+1})s_t^l + d. \quad (2.8)$$

個人は次のような対数効用関数のもとで、自らの消費から得る効用を最大化

するように行動する。

$$\max_{c_t^{yh}, c_{t+1}^{oh}} U(c_t^{yh}) + \frac{1}{1+\rho} U(c_{t+1}^{oh}) \equiv \ln c_t^{yh} + \frac{1}{1+\rho} \ln c_{t+1}^{oh}, \quad (2.9)$$

$$\max_{c_t^{yl}, c_{t+1}^{ol}} U(c_t^{yl}) + \frac{1}{1+\rho} U(c_{t+1}^{ol}) \equiv \ln c_t^{yl} + \frac{1}{1+\rho} \ln c_{t+1}^{ol}. \quad (2.10)$$

(2.9)と(2.10)は、それぞれ高所得者と低所得者の目的関数であり、 $\frac{1}{1+\rho}$ は主観割引率 ( $\rho > 0$ ) である。(2.9)に(2.5)と(2.6)を、(2.10)に(2.7)と(2.8)をそれぞれ代入すると

$$\max_{s_t^h} \ln[w_t^h - s_t^h - (d - vd^o)] + \frac{1}{1+\rho} \ln[(1+r_{t+1})s_t^h + d - d^o], \quad (2.11)$$

$$\max_{s_t^l} \ln[w_t^l - s_t^l - (d - vd^o)] + \frac{1}{1+\rho} \ln[(1+r_{t+1})s_t^l + d] \quad (2.12)$$

となる。(2.11), (2.12)についてそれぞれ最大化条件を導き、それを  $s_t^h$ ,  $s_t^l$  について整理することで家計の最適な貯蓄関数を得る。まず、高所得者の貯蓄関数を導出する。(2.11)の一階条件は

$$\frac{-1}{w_t^h - s_t^h - (d - vd^o)} + \frac{1}{1+\rho} \frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})s_t^h + d - d^o} = 0$$

である。これを  $s_t^h$  について整理することで、次のような高所得者の貯蓄関数を得る。

$$s_t^h = \frac{w_t^h - (d - vd^o)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)(d - d^o)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \quad (2.13)$$

低所得者の貯蓄関数については、(2.12)の一階条件は

$$\frac{-1}{w_t^l - s_t^l - (d - vd^o)} + \frac{1}{1+\rho} \frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})s_t^l + d} = 0$$

である。これを  $s_t^l$  について整理すると、次のような低所得者の貯蓄関数を得る。

$$s_t^l = \frac{w_t^l - (d - vd^o)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \quad (2.14)$$

## 2.2. 企業行動

次に企業行動について述べる。代表的企業を想定し、生産関数は次のようなコブ=ダグラス型を仮定する。

$$Y_t = F(K_t, H, L) \equiv AK_t^\alpha H^\beta L^\gamma. \quad (2.15)$$

ここで、 $K_t$  は  $t$  期の資本ストックを表す。また、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 、 $0 < \alpha < 1$ 、 $0 < \beta < 1$ 、 $0 < \gamma < 1$  である。さらに、以下の議論では  $\beta > \gamma$  を仮定する。

完全競争市場を仮定すれば、企業はプライステイカーとして利潤最大化行動をとる。すなわち企業行動は次のように定式化される。

$$\max_{K_t, H, L} F(K_t, H, L) - r_t K_t - w_t^h H - w_t^l L.$$

この一階条件は次のようになる。

$$r_t = F_K(K_t, H, L) = \alpha A K_t^{\alpha-1} H^\beta L^\gamma, \quad (2.16)$$

$$w_t^h = F_H(K_t, H, L) = \beta A K_t^\alpha H^{\beta-1} L^\gamma, \quad (2.17)$$

$$w_t^l = F_L(K_t, H, L) = \gamma A K_t^\alpha H^\beta L^{\gamma-1}. \quad (2.18)$$

また、生産関数は一次同次を満たすため、次のような完全分配が成立する。

$$Y_t = r_t K_t + w_t^h H + w_t^l L. \quad (2.19)$$

このとき、(2.17) と (2.18) より、

$$\frac{w_t^h}{w_t^l} = \frac{\beta A K_t^\alpha H^{\beta-1} L^\gamma}{\gamma A K_t^\alpha H^\beta L^{\gamma-1}} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{L}{H} > 1$$

であることがわかる。なぜならば、 $H < L$  の仮定より  $\frac{L}{H} > 1$  であり、 $\beta > \gamma$  の仮定より  $\frac{\beta}{\gamma} > 1$  となるためである。これよりただちに、 $w_t^h > w_t^l$  を得る。また、

貯蓄関数 (2.13)，(2.14) のそれぞれの第 2 項に関して  $\frac{(1+\rho)(d-d^0)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})} < \frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}$

が成立しており、 $w_t^h > w_t^l$  から第 1 項に関して  $\frac{w_t^h - (d - v d^0)}{2+\rho} > \frac{w_t^l - (d - v d^0)}{2+\rho}$  である。

よって、 $s_t^h > s_t^l$  となることもわかる。

最後に、資金市場均衡条件は次のようになる。<sup>8</sup>

$$K_{t+1} = s_t^h H + s_t^l L. \quad (2.20)$$

### 2.3. 資本ストックの動学式と定常状態

本節では、資金市場均衡条件 (2.20) と貯蓄関数 (2.13)，(2.14) を用いて、資本

<sup>8</sup> 資金市場均衡の議論については二神 [4] を参照しているが、本研究では、それを高所得者と低所得者が存在する場合に拡張している。(2.20) の導出は付録を参照。

ストックの動学式を導出する。まず、世代人口 ( $1 = H + L$ ) で (2. 20) を割り  $\frac{K_{t+1}}{H+L} = k_{t+1}$  とおくと、

$$k_{t+1} = s_t^h v + s_t^l (1 - v) \quad (2. 21)$$

となる。これに貯蓄関数 (2. 13), (2. 14) を代入すると、

$$k_{t+1} = \left[ \frac{w_t^h - d + vd^o}{2 + \rho} - \frac{(1 + \rho)(d - d^o)}{(2 + \rho)(1 + r_{t+1})} \right] v + \left[ \frac{w_t^l - (d - vd^o)}{2 + \rho} - \frac{(1 + \rho)d}{(2 + \rho)(1 + r_{t+1})} \right] (1 - v),$$

となり、企業の利潤最大化条件 (2. 16), (2. 17), (2. 18) を用いると

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \left[ \frac{\beta A v^{\beta-1} (1 - v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)}{2 + \rho} - \frac{(1 + \rho)(d - d^o)}{(2 + \rho)(1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})} \right] v \\ &+ \left[ \frac{\gamma A v^\beta (1 - v)^{\gamma-1} k_t^\alpha - (d - vd^o)}{2 + \rho} - \frac{(1 + \rho)d}{(2 + \rho)(1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})} \right] (1 - v) \\ &= \frac{\beta A v^\beta (1 - v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)v}{2 + \rho} - \frac{(1 + \rho)(d - d^o)v}{(2 + \rho)(1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})} \\ &+ \frac{\gamma A v^\beta (1 - v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)(1 - v)}{2 + \rho} - \frac{(1 - v)(1 + \rho)d}{(2 + \rho)(1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})} \end{aligned}$$

となる。両辺に  $2 + \rho$  を掛け、さらに変形し、整理すると資本ストックの動学式 (2. 22) を得る。

$$\begin{aligned} (2 + \rho)k_{t+1} &= \beta A v^\beta (1 - v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)v - \frac{(1 + \rho)(d - d^o)v}{1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} \\ &+ \gamma A v^\beta (1 - v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)(1 - v) - \frac{(1 - v)(1 + \rho)d}{1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

$$d - vd^o + \frac{(1 + \rho)(d - vd^o)}{1 + \alpha A v^\beta (1 - v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} + (2 + \rho)k_{t+1} = (\beta + \gamma)A v^\beta (1 - v)^\gamma k_t^\alpha. \quad (2. 22)$$

(2. 22) の左辺を  $k_{t+1}$  の関数として  $\Phi(k_{t+1})$  で表し、右辺を  $k_t$  の関数として  $\Psi(k_t)$  で表すと、動学式 (2. 22) は次の式に対応することがわかる。

$$\Phi(k_{t+1}) = \Psi(k_t).$$

右辺の関数  $\Psi(k_t)$  は、原点を通り単調に増加する凹関数である (図 2. 2)。

これに対して、左辺の関数  $\Phi(k_{t+1})$  の  $d - vd^o$  は切片で、 $(2 + \rho)k_{t+1}$  は傾

き  $2 + \rho$  の直線で表される。分数部分  $\frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}}$  のグラフの形状を確認するために1階導関数と2階導関数を求めると、次のようになる。

$$\frac{d}{dk_{t+1}} \frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{-(1+\rho)(d-vd^0)(\alpha-1)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})^2},$$

$$\frac{d^2}{dk_{t+1}^2} \frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})^4}.$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Omega(k_{t+1}) = & -(1+\rho)(d-vd^0)(1-\alpha)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-3} (1 \\ & + \alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}) (2-\alpha + \alpha^2 Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

分数部分  $\frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}}$  の1階導関数と2階導関数を導出した結果、 $d-vd^0$

により、グラフの形状が異なることが確認できた。そこで、以下の2パターンに場合わけをし、それぞれのグラフの形状を確認していく。

(i)  $d-vd^0 \geq 0$  の場合

$\Phi(k_{t+1})$  の第2項の1階導関数

$$\frac{d}{dk_{t+1}} \frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{-(1+\rho)(d-vd^0)(\alpha-1)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})^2} > 0.$$

$\Phi(k_{t+1})$  の第2項の2階導関数

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dk_{t+1}^2} \frac{(1+\rho)(d-vd^0)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} &= \frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})^4} < 0, \\ \Omega(k_{t+1}) &= -(1+\rho)(d-vd^0)(1-\alpha)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-3} \times \\ & (1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}) (2-\alpha + \alpha^2 Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}) < 0. \end{aligned}$$

$\Phi(k_{t+1})$  の第2項の1階導関数の符号は正であり、2階導関数の符号は負である。これに  $\Phi(k_{t+1})$  の第3項を合わせることにより  $\Phi(k_{t+1})$  のグラフの形状が確定する。



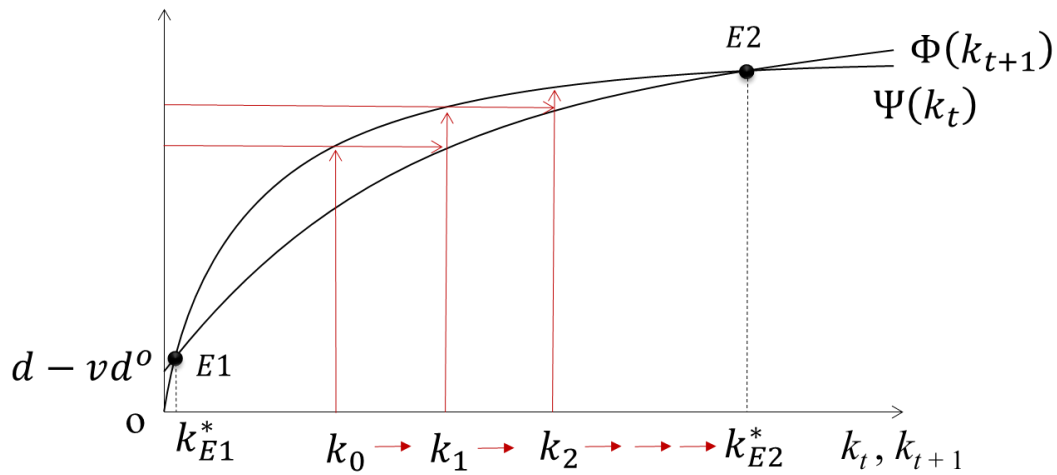


図 2.2 :  $d - vd^0 \geq 0$  のモデルの定常状態と移行過程

この図 2.2 では本モデルの定常状態と移行過程を示している。定常状態は  $\Phi(k_{t+1})$  と  $\Psi(k_t)$  の交点に対応しており、図では 2 点 ( $E1, E2$ ) が存在するケースを描いている。それぞれの定常状態に対応する資本ストックは、 $k_{E1}^*$  と  $k_{E2}^*$  である。容易に確認できるように、 $k_{E1}^*$  は不安定な定常状態であり、 $k_{E2}^*$  は安定的な定常状態である。安定的な定常状態の資本ストックが大きいので、こちらを高位均衡と呼ぶ。

次に、高所得の老年者が支払う保険料である  $d^0$  を政府が操作した場合の、高位均衡に与える影響を分析する。関数  $\Phi$  をパラメータ  $d^0$  で微分すれば、あらゆる  $k > 0$  に対してその符号は負となることがわかる。

$$\frac{d\Phi}{dd^0} = -v + \frac{-(1+\rho)v}{1 + \alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} < 0.$$

これは、 $d^0$  が増加する場合、関数  $\Phi$  のグラフは下方にシフトすることを意味している。

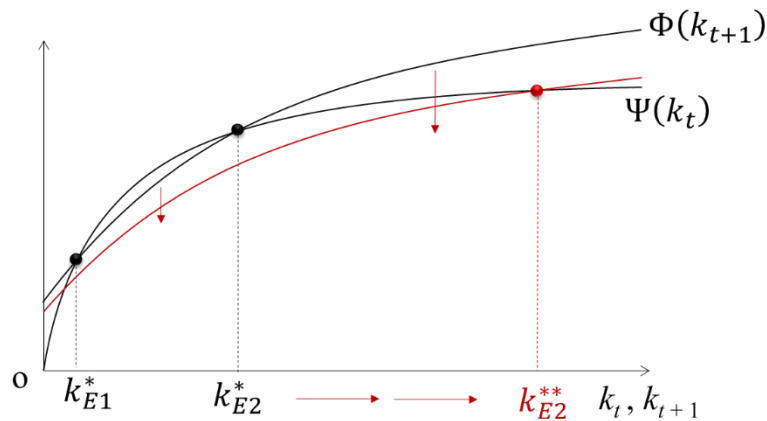


図 2.3 :  $d^0$ が増加した場合の高位均衡の変化

図 2.3 からわかるように、関数  $\Phi(k_{t+1})$  のグラフが下方にシフトすることで安定的な定常状態  $k_{E2}^*$  が右方向にシフトし、定常状態の資本ストックは増加する。逆に、高所得の老年者の保険料が減少すれば、資本ストックは低下する。

本章は高所得の老年者に保険料負担を課すモデルではあるが、すべての保険料を若年世代が負担する場合も本モデルで説明が可能である。それは  $d^0 = 0$  のスペシャルケースに対応する。そして、 $d^0 = 0$  のケースで高位均衡が存在するとすれば、これまでの分析から、 $d^0 > 0$  のケースよりも資本ストックの水準は小さくなることがわかる。

では、高所得の老年者の保険料  $d^0$  が増加することで、なぜ定常状態の資本ストック水準が増加するのだろうか。その理由は次のように説明することができる。まず、高所得の老年者が保険料を負担することにより、若年世代の保険負担  $d - vd^0$  が減少する。これは若年世代の可処分所得を増加させ、(2.13)と

(2.14)より貯蓄水準を増加させる（つまり、 $\frac{ds_t^h}{dd^0} > 0$ 、 $\frac{ds_t^l}{dd^0} > 0$ ）。この貯蓄の増加が(2.20)の資金市場均衡式を通じて資本ストックの増加につながるのである。

以上の議論より、次の命題を得る。

**【命題 2.1】** 若年世代に加え高所得老年者も賦課方式年金の保険料を負担することで、そうでない場合に比べて安定的な定常状態の資本ストック水準は増加する。

(ii)  $d - vd^0 < 0$  の場合

$\Phi(k_{t+1})$  の第 2 項の 1 階導関数

$$\frac{d}{dk_{t+1}} \frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{-(1+\rho)(d-vd^o)(\alpha-1)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})^2} < 0.$$

$\Phi(k_{t+1})$  の第 2 項の 2 階導関数

$$\frac{d^2}{dk_{t+1}^2} \frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{1+\alpha})^4} > 0,$$

$$\Omega(k_{t+1}) = -(1+\rho)(d-vd^o)(1-\alpha)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-3} (1 + \alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})(2-\alpha + \alpha^2 Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}) > 0.$$

$\Phi(k_{t+1})$  の第 2 項の 1 階導関数の符号は負であり、2 階導関数の符号は正である。これに  $\Phi(k_{t+1})$  の第 3 項のグラフを合わせることにより  $\Phi(k_{t+1})$  のグラフの形状が決まる。

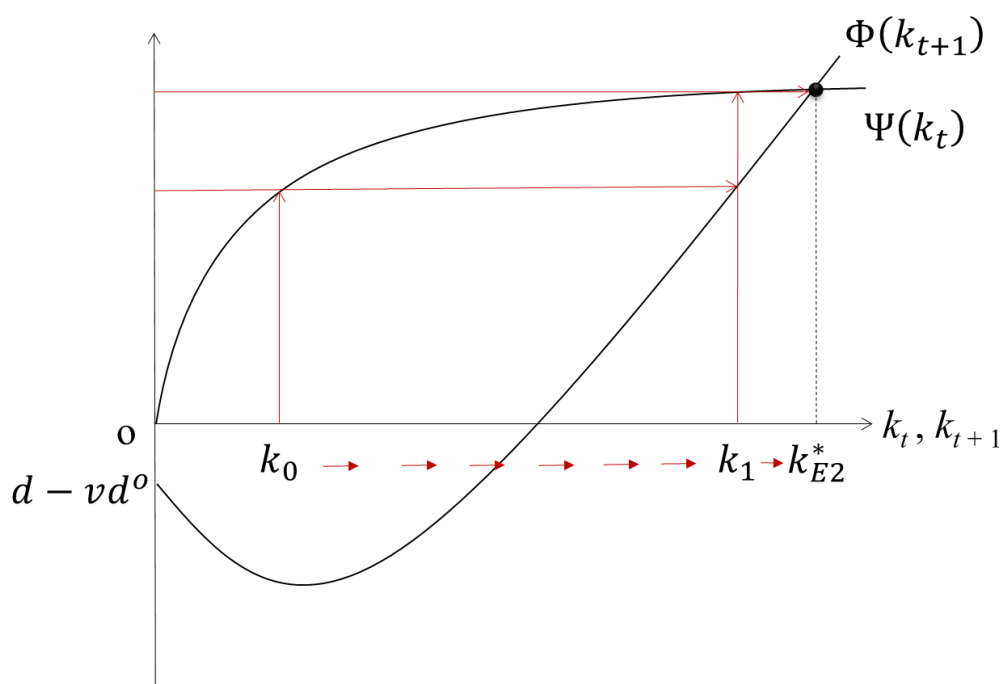


図 2.4 :  $d - vd^o < 0$  の定常状態と移行過程

図 2.4 は  $d - vd^o < 0$  の場合の定常状態と移行過程を示している。定常状態は  $\Phi(k_{t+1})$  と  $\Psi(k_t)$  の交点に相当する。図 2.4 の定常状態は一意に決定される。

なお、このケースにおいても  $d^o$  が増加する場合、関数  $\Phi$  のグラフは下方にシフトし、安定的な定常状態の資本ストックは増加する。

## 2.4. シミュレーション分析

本節では、これまでの理論研究で明らかにすることができなかった点についてシミュレーション分析を行う。すなわち、高位均衡と低位均衡が存在するようなパラメータセットが存在するのか、である。特に、本節では、高所得老年者の保険料  $d^o$  との関係で高位均衡と低位均衡の存在とその変化も確認する。さらに、高位均衡における高所得者と低所得者の生涯効用についてもシミュレーション分析を行う。

まず、外生パラメータの値を次のように設定する。

$$\alpha=0.4, \beta=0.4, \gamma=0.2, \rho=0.9, A=10, v=0.01, d=0.2.$$

これらの値の中で、 $\alpha = 0.4$  としているが、このことは、 $\beta + \gamma = 0.6$  であることを意味する。この数値は実証的に推計されている労働分配率の値 (0.57~0.65) と整合的である<sup>9</sup>。

時間選好率  $\rho$  については、Momota and Horii [3] など世代重複モデルの先行研究で主観割引率  $\rho/(1+\rho)$  が 0.5 程度で仮定されおり、 $\rho = 0.9$  はほぼその値に近い。A については実数解が出るように設定している。 $v = 0.01$  は、高所得者が世代の 1% である状況を想定している。d については、年金の保険料が所得や利子所得を上回らない範囲で設定している。

このもとで、 $d^o$  の値を増加させた場合の、内生変数の値を求めると、次のようになる。

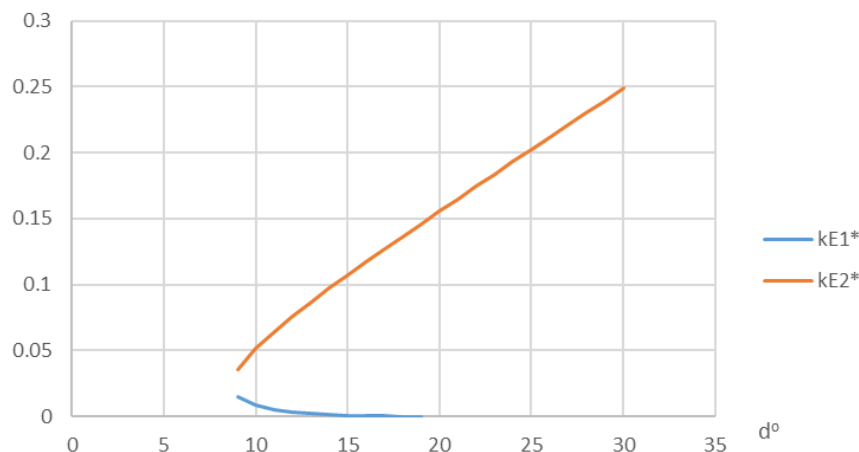


図 2.5 :  $d^o$  と  $k_{E1}^*$ ,  $k_{E2}^*$

<sup>9</sup> Karabarbounis and Neiman [10] では、アメリカ、日本、ドイツなどの主要先進国では 0.57 から 0.65 の範囲にあるが、いずれも近年低下傾向にあることが指摘されている。

図 2.5 では、 $d^o$  と定常状態の資本ストックの関係を、 $9 \leq d^o \leq 30$  の範囲で求めている。ここでは高位均衡である  $k_{E2}^*$  に注目する。理論分析で論じたように、 $d^o$  を増加させると  $k_{E2}^*$  も増加することがこのシミュレーションにより明らかになった。逆に、低位均衡  $k_{E1}^*$  は低下し、 $20 < d^o$  で消滅する。

また、(2.17)、(2.18)からわかるように、高位均衡の資本ストックの増加に伴い、高所得者と低所得者の賃金も増加する。しかし、すでに確認したように、このモデルでは  $\frac{w_t^h}{w_t^l}$  は一定であるので、賃金格差は変化しない。

次に、 $d^o$  の変化と高位均衡における生涯所得の関係を、高所得者と低所得者に分けてグラフにしたものが、それぞれ図 2.6 と図 2.7 である。

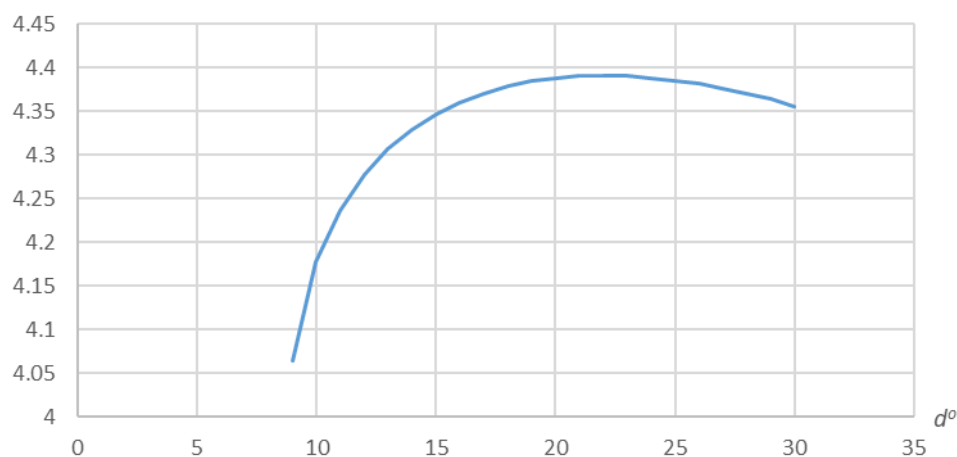


図 2.6 : 高所得者の生涯効用

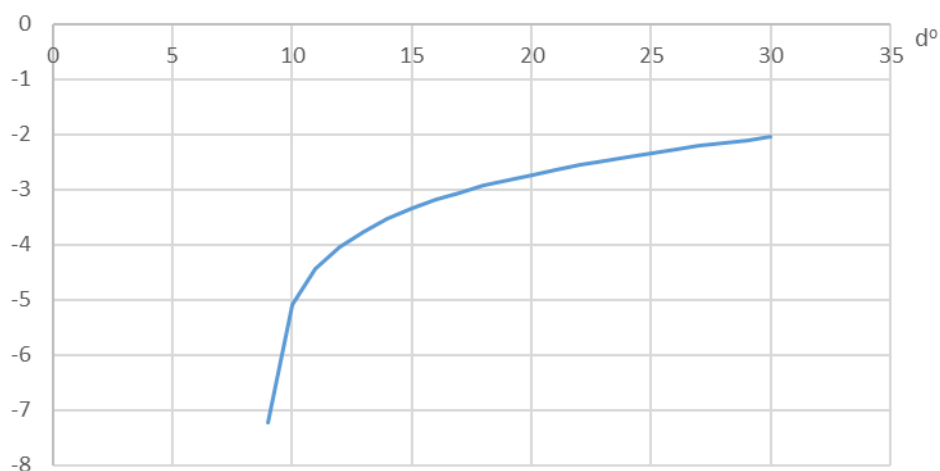


図 2.7 : 低所得者の生涯効用

図 2.6 より、高所得者の生涯効用を最大にする保険料が存在し、その値は  $d^o = 22$  である。これに対して、低所得者の生涯効用は  $d^o$  が増加するにしたがって増加しつづけることが図 2.7 より確認できる。低所得者は高所得老年者から所得移転を受けるため、生涯効用が増加することはわかりやすい。しかし、高所得老年者においても、生涯効用が増加する領域が生じる理由は何だろうか。それは次のように説明することができる。

	タイプ $h$	タイプ $l$
若年世代	$c^{yh}$	$c^{yl}$
老年世代	$c^{oh}$	$c^{ol}$

図 2.8 : 各期における 4 タイプの人々の消費

このモデルでは各期に若年世代と老年世代が存在するが、さらに彼らはタイプ  $h$  とタイプ  $l$  に分けることができる。したがって、各期において常に 4 タイプの人々が存在する。その 4 タイプの人々の消費を表したものが図 2.8 である。まずタイプ  $l$  の人々は  $d^o$  の増加により所得移転を受けるため、若年世代、老年世代ともに、消費は増加する。次にタイプ  $h$  の人々では、 $d^o$  を増加させた場合、老年世代から若年世代への所得移転が行われるため、若年世代の消費は増加する。しかし、タイプ  $h$  の老年世代の消費は減少する。そのため、 $d^o = 22$  までは若年世代の消費の増加に伴う生涯効用の増加の寄与が老年世代の所得減少の寄与を上回り、それ以降では老年世代の消費の減少が上回るようになる。このため、高所得者の生涯効用は  $d^o = 22$  を頂点に上に凸のグラフになる。

高所得者の生涯効用を最大にする  $d^o = d^*$  が存在する場合、社会的観点からこの保険料は合意可能となる。なぜならば、 $d^o$  の水準を  $d^*$  よりも小さな水準から徐々に増加させる場合を考えてみよう。すると、低所得者の生涯効用は、増加するため、 $d^o$  を増加させることに賛成する。対して、高所得者は  $d^o = d^*$  までは高所得者の生涯効用も増加しているため、 $d^o$  を増加させることに賛成する。しかし、 $d^o = d^*$  を超えると、高所得者の生涯効用は減少するため、 $d^o$  を増加させることに反対する。よって、高所得者と低所得者の間での合意可能な保険料は  $d^o = d^*$  である。

## おわりに

本章では、高所得者と低所得者が存在する 2 世代重複モデルに、高所得老年者も年金の保険料を一部負担する賦課方式年金制度を導入した。その結果、高所得老年者が保険料を負担することで安定的な定常状態の資本ストックは増加することを明らかにした。さらに、高所得老年者の負担を高めれば高めるほど、定常状態の資本ストックは増加することも示すことができた。本章では世代間格差を是正するために、高所得老年者が公的年金の支え手に加わる仕組みを導入したが、これにより経済はより望ましい状況で持続可能となる。さらに、この年金制度を導入していない現行方式と比較して、定常状態での高所得者と低所得者の双方の効用水準はともに増加することも明らかにした。さらに、高所得者と低所得者の双方が合意可能な、高所得老年者の保険料水準が存在することも、シミュレーション分析で明らかにした。

最後に、今後の課題を述べる。本章で提案したモデルでは人口成長率を考慮せず、若年者の負担を減らす方策を考えたが、賦課方式年金制度における世代間格差と年金制度の持続可能性の問題は人口減少社会において顕著となる。しかしこのモデルに人口成長（特にマイナス成長）を入れても、結論が変わることはないと予想される。むしろ人口成長率を入れることによりこの主張がより一層明確になると考えられる。人口成長率を入れ、人口減少社会を考える場合に高所得の老年者の人口が相対的に高まることによって、より一層保険料を老年者からとりやすくなると考えられるためである。とはいえ、人口減少社会においてこの推論が妥当するのかは、本モデルを拡張し、検証する必要がある。そこで、次章以降本モデルを拡張したモデルを構築し、シミュレーション分析を行う。

## 付録：(2.20) の導出

この付録では、二神 [14] の第 3 章「世代重複モデル」の議論を本モデルに当てはめ、資金市場均衡条件の (2.20) を導出する。第  $t$  期には若年期の  $t$  世代と老年期の  $t-1$  世代が共存しており、この 2 つの世代の各個人が消費をおこなう。ここでは老年期 ( $o$ ) と若年期 ( $y$ ) の区別をつけるため人口  $H$ 、 $L$  に添え字をつける。このとき、財市場均衡条件は次のようになる。

$$Y_t = c_t^{yh} H^y + c_t^{oh} H^o + c_t^{yl} L^y + c_t^{ol} L^o + I_t. \quad (\text{A.1})$$

$I_t$  は  $t$  期の粗投資額を表す。資本減耗率を 0 とすると  $I_t = K_{t+1} - K_t$  となるの

で、(A. 1) 式は次のように書き換えることができる。<sup>10</sup>

$$Y_t = c_t^{yh}H^y + c_t^{oh}H^o + c_t^{yl}L^y + c_t^{ol}L^o + (K_{t+1} - K_t). \quad (\text{A. 2})$$

(2. 19), (A. 2) より

$$\begin{aligned} r_t K_t + w_t^h H^y + w_t^l L^y \\ = c_t^{yh} H^y + c_t^{oh} H^o + c_t^{yl} L^y + c_t^{ol} L^o + (K_{t+1} - K_t). \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

これを  $K_{t+1}$  について整理すると

$$K_{t+1} = (w_t^h - c_t^{yh})H^y + (w_t^l - c_t^{yl})L^y + (1 + r_t)K_t - c_t^{oh}H^o - c_t^{ol}L^o \quad (\text{A. 4})$$

を得る。(A. 4)に個人の予算制約式(2. 5), (2. 6), (2. 7), (2. 8)を代入し整理することで、次式を得る。

$$\begin{aligned} K_{t+1} = s_t^h H^y + s_t^l L^y + (1 + r_t)K_t - (1 + r_t)s_{t-1}^h H^o - (1 + r_t)s_{t-1}^l L^o \\ + (d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - (d - d^o)H^o - dL^o. \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

ここで、(A. 5) 右辺の後半に出てくる  $(d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - (d - d^o)H^o - dL^o$  はゼロとなる。なぜならば、毎期、賦課方式年金の収支は均衡し、「保険料の支払い=年金の受け取り」となり、これは

$$(d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y + H^o d^o = H^o d + L^o d$$

と表すことができる。したがって、(A. 5) は、

$$K_{t+1} = s_t^h H^y + s_t^l L^y + (1 + r_t)(K_t - s_{t-1}^h H^o - s_{t-1}^l L^o) \quad (\text{A. 6})$$

となる。

次に(A. 2)に高所得者と低所得者の若年期の予算制約式(2. 5), (2. 7)を代入し、 $t = 0$  とおく。

$$\begin{aligned} K_1 &= [s_0^h + (d - vd^o)]H^y + [s_0^l + (d - vd^o)]L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o, \\ &= s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 + (d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o, \\ &= s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o + H^y d - vH^y d^o + L^y d - vL^y d^o. \end{aligned}$$

ここで、 $v = \frac{H^o}{H^y + L^y}$ 、 $H^y + L^y = 1$  より

$$K_1 = s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o + d - H^o d^o \quad (\text{A. 7})$$

を得る。0期が老年期となる初期の老年者は全体で  $K_0$  の資産を保有し、その利子所得  $r_0 K_0$  を得るが、高い資産所得を持つ人々は保険料  $d^o H^o$  を支払う。その残額に 0期の老年者全員が受け取る年金  $d(H^o + L^o)$  を加えた総額がすべて消

---

<sup>10</sup> 資本減耗率を  $\delta$  とした場合、 $K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$  となり、これは、(純投資) = (粗投資) - (減耗分)である。これを变形すると  $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$  となる。第  $t$  期の期首に存在する資本は  $K_t$ 、第  $t$  期の期末には  $(1 - \delta)K_t$  になる。第  $t$  期の若年世代は貯蓄をもとに第  $t$  期の老年世代から残存資本と  $I_t$  を購入し、 $(1 - \delta)K_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = s_t^h H + s_t^l L$  となる。これを整理すると、 $K_{t+1} = s_t^h H + s_t^l L$  となり、資本減耗を考慮しても(2. 20)は成立する。この点に関する詳細は二神 [14] p.63 を参照。



費に充てられる。これを式で表すと、

$$(1 + r_0)K_0 + d(H^0 + L^0) - d^o H^o = c_0^{oh} H^o + c_0^{ol} L^o$$

となる。 $H^0 + L^0 = 1$  であることに注意し、この式を (A. 7) の右辺に代入すると、

$$K_1 = s_0^h H^y + s_0^l L^y$$

となる。

この (A. 7) は任意の  $t$  で成立するので、人口は成長しないという仮定より、

$$\begin{aligned} K_t &= s_{t-1}^h H^y + s_{t-1}^l L^y, \\ &= s_{t-1}^h H^o + s_{t-1}^l L^o \end{aligned} \tag{A. 8}$$

となる。これを (A. 6) に当てはめると、資金市場均衡条件

$$K_{t+1} = s_t^h H + s_t^l L \tag{2. 20}$$

が成り立つ。

## 参考文献

- [1] Acemoglu, D. (2009), “Growth with Overlapping Generations,” in *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.
- [2] Akira Kamiguchi (2021), “Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model”, 2021 年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.
- [3] Akira Momota and Ryo Horii (2013), “Timing of childbirth, capital accumulation, and economic welfare”, *Oxford Economic Papers*, 65(2),494-522.
- [4] Alessandro Cigno (1993), “Intergenerational transfers without altruism: Family, market and state”. *European Journal of Political Economy* 9(4), 505-518.
- [5] Dahan, M. and D. Tsiddon (1998), “Demographic Transition, Income Distribution, and Economic Growth”, *Journal of Economic Growth* 3, 29-52.
- [6] de la Croix, D. and P. Michel (2002), *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge University Press.
- [7] Diamond, P. (1965), “National Debt in a Neoclassical Growth Model.” *American Economic Review*, 55(5), 1126–1150.
- [8] Giam Pietro Cipriani (2014), “Population aging and PAYG pensions in the OLG model”, *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256.
- [9] Glomm, G. and B. Ravikumar (1992), “Public versus private investment in human capital: endogenous growth and income inequality”, *Journal of Political Economy* 100, 818-834.
- [10] Karabarbounis, L and B. Neiman (2014), “The Global Decline of the Labor Share,” *The Quarterly Journal of Economics* 129, 61-103.

- [11] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), “Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model”, *Journal of Population Economics* 25(3), 955-961.
- [12] Sakagami, T and M. Matsuo (2021), “Uncertainty of Educational Outcome, Demographic Transition and Income Distribution,” *Globalization, Population, and Regional Growth in the Knowledge-Based Economy*, Springer, 111-133.
- [13] Yakita, A. (2017), *Population Aging, Fertility and Social Security*, Springer.
- [14] 二神孝一 (2012), 『動学マクロ経済学—成長理論の発展』、日本評論社.

## 第3章 人口減少社会における公的年金制度の持続可能性と経済厚生分析

### はじめに

すでに述べたように、賦課方式年金制度が抱える問題として少子高齢化の進展に伴う世代間格差の問題と、人口減少社会における年金の持続可能性の問題があげられる。前者は少子高齢化が進むことで、若年世代の1人当たり年金負担が増加してしまうという問題である。これに対して後者は若年世代が老年世代を支えるという現在の賦課方式年金制度のもとで、その持続可能性の条件が厳しさを増しているというものである。

そこで本研究の第2章では賦課方式年金制度のもと、年金負担の世代間格差を是正し、年金の持続可能性を高める新しい年金政策を提案した。具体的には、若年世代に加えて、高い資産所得を得ている老年世代も保険料を負担するというものである。

ところで、第2章では人口が一定の状況を想定していたが、現実的には我が国の人口成長率、特に生産年齢人口成長率はマイナスとなっている。このため現在の賦課方式年金制度のもとでの世代間格差は一層深刻なものとなっている。

そこで本章では、このような人口減少社会において本研究の政策効果を論じるために、第2章のモデルに人口成長率を導入する。

その結果、第2章と同様に、安定的な性質をもつ高位均衡が存在する可能性があることを明らかにする。さらに、人口成長率が増加（減少）すると、高位均衡に対応する1人当たり資本ストックは低下（増加）することを明らかにする。

最後に、本章の構成は以下の通りである。まず第1節で高所得者と低所得者からなる世代重複モデルを提示する。第2節ではこのモデルの動学分析を行う。

### 3.1. モデル

本章では第2章のモデルに人口成長率を導入し、高所得老年者も保険料を負担する賦課方式年金制度を組み込んだ2期間OLGモデルを構築する。人々は若年期と老年期の2期間を生存する。若年期に高所得と低所得の家計の存在を仮

定し、 $t$  期に若年者である世代を  $t$  世代と呼ぶ。各世代には高所得者と低所得者が存在している。 $t$  期の若年者のなかで高所得者の人口を  $H_t$ 、低所得者の人口を  $L_t$  で表し、それぞれの人口成長率を  $n$ 、 $m$  とすると、次の関係が成立する。高所得者の人口成長率については

$$\frac{H_{t+1}-H_t}{H_t} = n \Leftrightarrow H_{t+1} = (1+n)H_t,$$

低所得者の人口成長率については

$$\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t} = m \Leftrightarrow L_{t+1} = (1+m)L_t.$$

若年期から老年期に移行する際の生存率は 100% とする。よって、 $H_t^y = H_{t+1}^o \equiv H_t$ 、 $L_t^y = L_{t+1}^o \equiv L_t$  が成立する。ここで、上添え字の  $y$  は「若年期」、 $o$  は「老年期」を示している。また、人口成長率は低所得者のほうが大きい、つまり  $m \geq n > -1$  を仮定する。各世代人口に占める高所得者の比率を  $v_t$  と置くと、

$$\frac{H_t}{H_t + L_t} \equiv v_t, \quad \frac{L_t}{H_t + L_t} = \frac{H_t + L_t}{H_t + L_t} - \frac{H_t}{H_t + L_t} \equiv 1 - v_t$$

となる。

次に、 $t$  世代の高所得者の若年期と老年期の予算制約式は、それぞれ次の通りである。

$$c_t^{yh} + s_t^h + \left( d - \frac{v_t}{1+n} d^o \right) = w_t^h, \quad (3.1)$$

$$c_{t+1}^{oh} + d^o = (1+r_{t+1})s_t^h + \left( d - \frac{v_{t+1}}{1+n} d^o \right) \{ (n-m)v_t + (1+m) \} + v_t d^o. \quad (3.2)$$

ここで、 $c_t^{yh}$  は  $t$  期の若年者 ( $y$ ) における高所得者 (タイプ  $h$ ) の消費、 $s_t^h$  は高所得若年者の貯蓄、 $d$  は「もし若年者だけが保険料を負担するとした場合」の若年者の 1 人当たりの保険料、 $d^o$  は若年期に高所得を得ていた老年者が支払う 1 人当たりの保険料を表している。よって、(3.1) 式の左辺の  $d - \frac{v_t}{1+n} d^o$  は若年者が実際に負担する保険料を表している。また、 $c_{t+1}^{oh}$  は  $t+1$  期の老年者 ( $o$ ) における高所得者 (タイプ  $h$ ) の消費、 $r_{t+1}$  は  $t+1$  期の利子率を表している。よって、(3.2) 式右辺の  $r_{t+1}s_t^h$  は高所得老年者の資産所得であり、右辺第 2 項と第 3 項  $\left( d - \frac{v_{t+1}}{1+n} d^o \right) \{ (n-m)v_t + (1+m) \} + v_t d^o$  は老年者が受け取る 1 人当たり年金受給額を表している。

これに対して、 $t$  世代の低所得者の若年期と老年期の予算制約式は、それぞれ次の通りである。

$$c_t^{yl} + s_t^l + \left(d - \frac{v_t}{1+n} d^o\right) = w_t^l, \quad (3.3)$$

$$c_{t+1}^{ol} = (1+r_{t+1})s_t^l + \left(d - \frac{v_{t+1}}{1+n} d^o\right) \{(n-m)v_t + (1+m)\} + v_t. \quad (3.4)$$

若年期の 1 人当たり保険料は所得と独立に全員が一定額を支払うが、低所得の高齢者は保険料を負担しないと仮定している。

ここで、年金の保険料は所得や利子所得を上回らないものとする。つまり、

$$d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \leq \min(w_t^l, w_t^h) \text{ かつ } d^o \leq r_{t+1} s_t^h. \quad (3.5)$$

$t$  世代の高所得者  $h$  と低所得者  $l$  の生涯効用の最大化問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \max U_t^i, \quad i = h, l \\ U_t^i &= U(c_t^{yi}) + \frac{1}{1+\rho} U(c_{t+1}^{oi}) \equiv \ln c_t^{yi} + \frac{1}{1+\rho} \ln c_{t+1}^{oi}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

これらの効用最大化条件を導出し、それぞれ、 $s_t^h$ 、 $s_t^l$  について整理することで最適な貯蓄関数を得る。

高所得者の貯蓄関数：

$$s_t^h = \frac{w_t^h - \left(d - \frac{v_t}{1+n} d^o\right)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho) \left[ \left(d - \frac{v_t}{1+n} d^o\right) \{(n-m)v_t + (1+m)\} + v_t d^o - d^o \right]}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \quad (3.7)$$

低所得者の貯蓄関数：

$$s_t^l = \frac{w_t^l - \left(d - \frac{v_t}{1+n} d^o\right)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho) \left[ \left(d - \frac{v_t}{1+n} d^o\right) \{(n-m)v_t + (1+m)\} + v_t d^o \right]}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \quad (3.8)$$

続いて、企業行動について説明する。まず、生産関数は次のようなコブ=ダグラス型を仮定する。

$$Y_t = F(K_t, H_t, L_t) \equiv AK_t^\alpha H_t^\beta L_t^\gamma. \quad (3.9)$$

ここでは、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 、 $0 < \alpha < 1$ 、 $0 < \beta < 1$ 、 $0 < \gamma < 1$ 、 $\beta > \gamma$  とする。

完全競争市場を仮定すれば、企業はプライステイカーとして利潤最大化行動をとる。そのときの利子率、高所得者の所得、低所得者の所得は以下のように表せる。

$$r_t = F_K(K_t, H, L) = \alpha AK_t^{\alpha-1} H^\beta L^\gamma, \quad (3.10)$$

$$w_t^h = F_H(K_t, H, L) = \beta AK_t^\alpha H^{\beta-1} L^\gamma, \quad (3.11)$$

$$w_t^l = F_L(K_t, H, L) = \gamma AK_t^\alpha H^\beta L^{\gamma-1}. \quad (3.12)$$

第 2 章と同様に、資本減耗率がゼロのもとでの完全分配と財市場の均衡より (3.13) が導ける。

$$K_{t+1} = (w_t^h - c_t^{yh})H_t^y + (w_t^l - c_t^{yl})L_t^y + (1 + r_t)K_t - c_t^{oh}H_t^o - c_t^{ol}L_t^o. \quad (3.13)$$

次に、資金市場均衡条件を求めるに際し、賦課方式年金の収支均衡式は、保険料の支払いと年金の受取りが等しくなることであるので、

$$\left(d - \frac{v_t}{1+n}d^o\right)(H_t^y + L_t^y) + d^oH_t^o = \left[\left(d - \frac{v_t}{1+n}d^o\right)\{(n-m)v_{t-1} + (1+m)\} + v_t d^o\right](H_t^o + L_t^o)$$

となる。そこで、資金市場均衡条件は次の式になる。

$$K_{t+1} = s_t^h H_t + s_t^l L_t. \quad (3.14)$$

(3.13) を世代人口で割り、 $\frac{K_{t+1}}{H_{t+1} + L_{t+1}} = k_{t+1}$  とおくと、次の動学式を得る。

$$k_{t+1} = s_t^h \frac{v_{t+1}}{1+n} + s_t^l \frac{1-v_{t+1}}{1+m}. \quad (3.15)$$

(3.15) に貯蓄関数(3.7), (3.8)を代入すると、資本ストックの動学式は次の式を得る。

$$\begin{aligned} & (2 + \rho)\{(1+n)v_t + (1+m)(1-v_t)\}k_{t+1} \\ & + \frac{(1 + \rho) \left[ \left( d - \frac{v_{t+1}}{1+n}d^o \right) \{(n-m)v_t + (1+m)\} + (1-d^o)v_t \right]}{1 + \alpha A v_{t+1}^\beta (1-v_{t+1})^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} \\ & = (\beta + \gamma) A v_t^\beta (1-v_t)^\gamma k_t^\alpha - \left( d - \frac{v_t}{1+n}d^o \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

以下では、 $n = m$  のケースに限定して分析を行う<sup>11</sup>。このとき、各世代人口に占める高所得者の比率は一定になる。

$$\frac{H_{t+1}}{H_{t+1} + L_{t+1}} = \frac{(1+n)H_t}{(1+n)H_t + (1+n)L_t} = \frac{H_t}{H_t + L_t} = v.$$

そこで(3.16)より、 $n = m$ である場合の資本ストックの動学式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & d - \frac{v}{1+n}d^o + \frac{(1 + \rho) \left[ \left( d - \frac{v}{1+n}d^o \right) (1+n) + (1-d^o)v \right]}{1 + \alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} + (2 + \rho)(1+n)k_{t+1} \\ & = (\beta + \gamma) A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで(3.17)の左辺を $\Lambda(k_{t+1})$ 、右辺を $\Omega(k_t)$ とおくと、動学式は

$$\Lambda(k_{t+1}) = \Omega(k_t)$$

となる。

<sup>11</sup> 人口成長率が  $m > n$  となるケースでは  $v_t \rightarrow 0$  となってしまう。したがって、 $v_t$  が有限確定値を取り続ける条件は  $m = n$  である。

### 3.2. 動学分析

本節では(3.17)式で示される動学式の定常状態と安定性について分析を行う。右辺の  $\Omega(k_t)$  は、原点を通り単調に増加する凹関数である。

これに対して、左辺の関数  $\Lambda(k_{t+1})$  の第1項  $d - \frac{v}{1+n}d^o$  は切片、第3項は傾き  $(2+\rho)(1+n)$  の直線で表される。

まず、この動学過程を図示すると次のようになる。

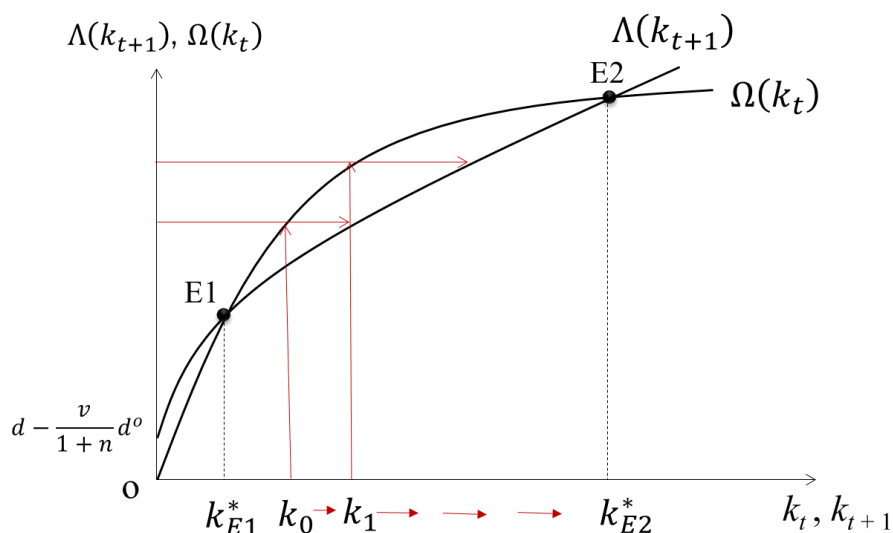


図 3.1 :  $d - \frac{v}{1+n}d^o \geq (d^o - 1)\frac{v}{1+n}$  の場合の定常状態と移行過程

図 3.1 では  $d - \frac{v}{1+n}d^o \geq (d^o - 1)\frac{v}{1+n}$  の場合の定常状態と移行過程を示している。このとき、関数  $\Lambda(k_{t+1})$  の第2項は正の値を取り、 $k_{t+1}$  が増加すれば  $(1+\rho)\left[\left(d - \frac{v}{1+n}d^o\right)(1+n) + (1-d^o)v\right] > 0$  に収束する増加関数となる。定常状態は  $\Lambda(k_{t+1})$  と  $\Omega(k_t)$  の交点に対応しており、図では2点 (E1, E2) が存在するケースを描いている。それぞれの定常状態に対する資本ストックは、 $k_{E1}^*$  と  $k_{E2}^*$  である。容易に確認できるように、 $k_{E1}^*$  は不安定な定常状態であり、 $k_{E2}^*$  は安定的な定常状態である。安定的な定常状態の資本ストックが大きいので、こちらを高位均衡と呼ぶ。

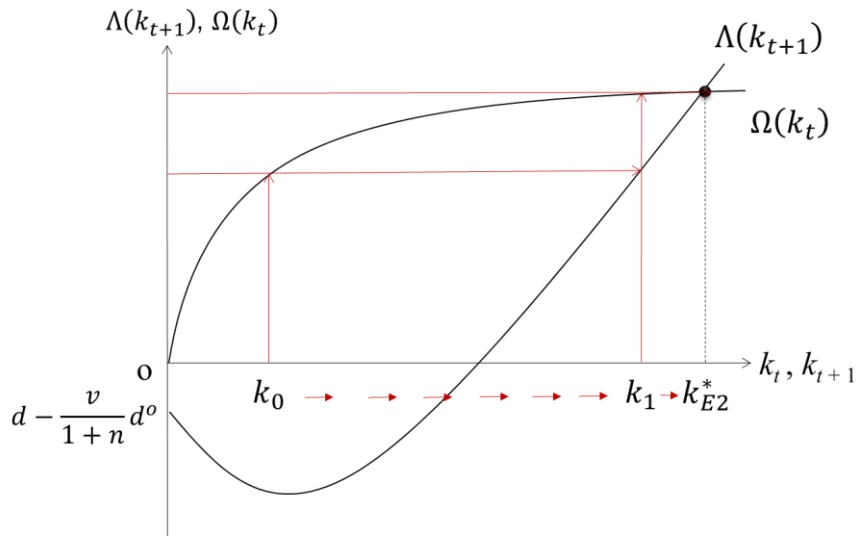


図 3.2 :  $d - \frac{v}{1+n}d^o < (d^o - 1)\frac{v}{1+n}$  の場合の定常状態と移行過程

図 3.2 では  $d - \frac{v}{1+n}d^o < (d^o - 1)\frac{v}{1+n}$  の場合の定常状態と移行過程を示している。このとき、関数  $\Lambda(k_{t+1})$  の第 2 項は負の値を取り、 $k_{t+1}$  が増加すれば  $(1+\rho)\left[\left(d - \frac{v}{1+n}d^o\right)(1+n) + (1-d^o)v\right] < 0$  に収束する減少関数となる。図 3.2 においても  $k > 0$  の領域で定常状態が 1 つだけ存在する。 $k_{E2}^*$  は安定的な定常状態である。

上記のいずれのケースにおいても、第 2 章と同様に、 $d^o$  が増加する場合、関数  $\Lambda$  のグラフは下方にシフトし、安定的な定常状態の資本ストックは増加する。



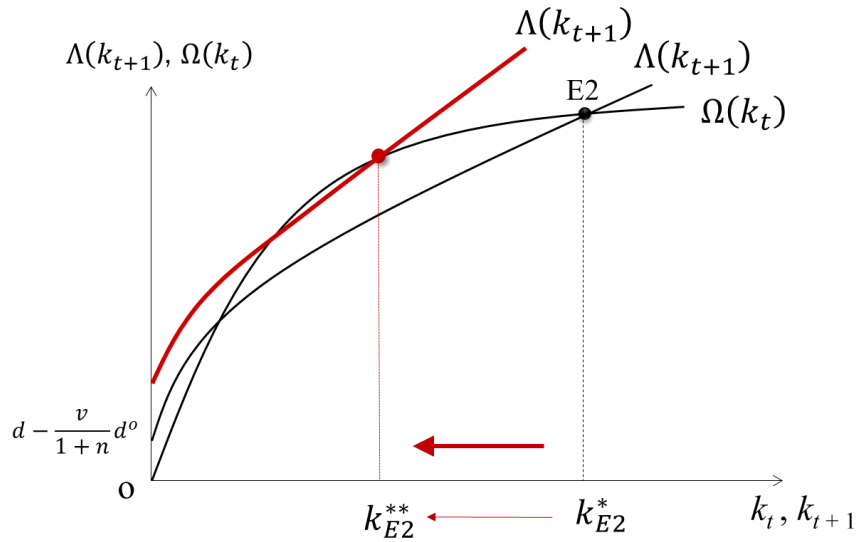


図 3.3:  $n$  が増加した場合の高位均衡の変化

次に、人口成長率  $n$  と定常状態の関係を、 $d - \frac{v}{1+n}d^0 > (d^0 - 1)\frac{v}{1+n}$  の場合  
 で求めてみる。人口成長率  $n$  の増加は関数  $\Lambda(k_{t+1})$  の切片と傾きを大きくす  
 るため、図 3.3 の赤いグラフのようになる。この結果、安定的な定常状態  $k_{E2}^*$   
 は左方向にシフトし、定常状態の資本ストックは減少する。逆に人口成長率の低  
 下は、資本ストックを増加させる。

## おわりに

本章では、第 2 章で構築したモデルに人口成長率を導入した。その結果、人口  
 が増加することで、安定的な定常状態の資本ストックは減少することを明らか  
 にした。しかし、(3.17)の動学式から定常状態の資本ストックを具体的に求める  
 ことは、第 2 章と同様にできなかった。

そこで、次章以降でシミュレーション分析を行い、定常状態の資本ストックを  
 求めたうえで、高所得老年者が負担する保険料と生涯効用との関係、および、高  
 所得者と低所得者の双方にとって合意可能な「高所得老年者の保険料負担水準」  
 の存在性について分析する。

## 参考文献

- [1] Alessandro Cigno (1993). “Intergenerational transfers without altruism: Family, market and state”. *European Journal of Political Economy* 9(4), 505-518.
- [2] Giam Pietro Cipriani (2014), “Population aging and PAYG pensions in the OLG model”, *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256.
- [3] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), “Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model”, *Journal of Population Economics* 25(3), 955-961.
- [4] 二神孝一 (2012), 『動学マクロ経済学: 成長理論の発展』 日本評論社.
- [5] Akira Kamiguchi (2021), “Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model”, 2021 年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.
- [6] Karabarbounis, L and B. Neiman (2014), “The Global Decline of the Labor Share,” *The Quarterly Journal of Economics* 129, 61-103.
- [7] Akira Momota and Ryo Horii (2013), “Timing of childbirth, capital accumulation, and economic welfare”, *Oxford Economic Papers*, 65(2),494-522.
- [8] Koton Tanigawa and Tomoya Sakagami (2021), “Pay-as-you-go pension systems supported by the old rich”, *Kyoto Institute of Economic Research Discussion Paper Series*, No.1067, Kyoto University.

## 第4章 シミュレーション分析の基礎

### はじめに

第3章で定常状態の一人当たり資本ストックを解析的に求めることができなかつたため、第4章では数値計算によって定常状態の一人当たり資本ストックをシミュレーション分析によって求めるためのプログラムの作成手順を示す。また、定常状態の一人当たり資本ストックだけでなく、貯蓄関数、利子所得、実行可能性に関する仮定、高所得者と低所得者の所得、それぞれ4タイプの消費、高所得者と低所得者の効用を求めるためのプログラムを組み込んだ手順も示す。これらの数値計算の結果をもとに、人口成長率と高所得老年者の保険料の変化との関係で、高所得者と低所得者の効用のグラフを描くプログラムの作成手順を示すことを目的としている。

ここでは **Maxima** (マキシマ) と **Stata** (ステータまたはスタータ) を用いる。**Maxima** とは、微分、積分、テイラー級数、ラプラス変換、常微分方程式、線形方程式系、多項式、集合、リスト、ベクトル、行列、およびテンソルを含む記号式および数値式を操作するためのシステムである<sup>12</sup>。**Stata** とは統計分析・データ管理・グラフ出力、レポートの自動作成などが行える統合統計ソフトウェアである<sup>13</sup>。

第2節では **Maxima** によるプログラムの作成手順を述べ、数値計算を行う。第3節では第2節の計算結果をもとに **Stata** によるプログラムでのグラフの作成手順を述べる。

### 4.1 Maxima によるプログラムの作成手順

本節では、[Maxima.sourceforge.io](http://Maxima.sourceforge.io)[1]を参考に、**Maxima** によるコマンド入力の手順について説明を行う。

初めに **Maxima** を起動し、そこに以下のコマンドを入力する。

```
load(newton);  
load("numericalio");
```

<sup>12</sup> [Maxima.sourceforge.io](http://Maxima.sourceforge.io) [1] を参照。

<sup>13</sup> (株)ライトストーン [2] を参照。

```
load(descriptive);
```

これはパッケージの読み込みを行うコマンドである。それぞれの構文にはセミコロン (;) を終わりに付ける。パッケージを使うことでより高度な機能が使えるようになる。これらのパッケージは Maxima をインストールした際にすでにインストールされているが、使うときにパッケージの読み込みを行わないとそのパッケージは作動しない。ここでは、方程式の数値解を求めるニュートン法を使うときに必要になるパッケージ newton、ファイルやストリームを読み書きする関数のパッケージ numericalio、記述統計計算とグラフ作成を行うための関数が入っているパッケージ descriptive の3つの読み込みを行う。もし、これらのパッケージが入っていない場合、高度な関数を書こうとしてもエラーが出てしまう。

次に出力フォルダの指定をするために、以下のコマンドを入力する。

```
dir_name:"C:/Maxima-5.45.1/";
```

これは処理結果を出力するフォルダを指定するコマンドである。dir\_name: の後に保存場所をダブルクォーテーション ("" ) で囲む。ここでは Maxima 内に保存されるコマンドである。

次に変数を定義する。

```
alpha:0.4;  
beta:0.4;  
gamma:0.2;  
rho:0.9;  
A:10;  
v:0.01;  
d:0.09;
```

ここでは、繰り返し処理をしない変数を定義している。(繰り返し処理については以降に述べる。) コロン (:) の後の数字がそれぞれの変数に値として代入される。ただ文字で示したい場合は数字を書かずに定義した文字の後にコロン、セミコロンの順で書く。

次に第3章で用いた関数  $\Lambda(k)$  を Maxima で定義する

```
Lambda(k):=(d-v/(1+n)*d_o)+(2+rho)*(1+n)*k+((1+n)*(1+rho)*(d-  
v/(1+n)*d_o)+(1+n)*(1+rho)*(v-v*d_o))/(1+alpha*A*v^beta*(1-  
v)^gamma*k^(alpha-1));
```

一般に、関数は「関数名 (変数1, 変数2) := (式)」の形式で定義される。ここでは関数名を Lambda(k)、変数を k と定義している。関数を定義するときはコロン、イコール (:=) を使う。

同様に第3章で用いた関数  $\Omega(k)$  を定義する。

```
Omega(k):=(beta+gamma)*A*v^beta*(1-v)^gamma*k^alpha;
```

ここでは関数名を  $\Omega(k)$ 、変数を  $k$  と定義している。掛け算はアスタリスク (\*)、乗数はキャレット (^) を使う。

次に、ファイル出力用のデータを保持しておくための行列を作る。

```
M_for_3D:matrix(["n","d_o","k_E1","k_E2","w_h","w_l","r","s_h","s_l","rs_h","rs_l",  
"d-(v/(1+n))d_o","rs_h-d_o>0","w_l-(d-  
(v/(1+n))d_o)","c_yh","c_oh","c_yl","c_ol","u_h","u_l"]);
```

matrix というのはその前の M\_for\_3D という名前の行列を作るというコマンドである。

次に繰り返し処理を行う。

```
for n:0.0 thru 0.1 step 0.1  
  do(  
    処理 1,  
    処理 2  
  );
```

繰り返し処理を行うときの構文は「for 変数：初期値 thru 繰り返しが終わる変数の値 step 変数の刻み幅 do 繰り返したい処理」を使用している。ここでは  $n$  を 0.0~0.1 まで 0.1 刻みで処理を行うという意味の構文である。(処理の中身は以降で述べる。) 繰り返したい処理が複数ある場合には、「do(処理 1, 処理 2, …, 処理 n);」と書く。これまで構文の終わりにはセミコロン (;) を使っていたが、繰り返し構文の中ではカンマ (,) を使う。また、処理の最後は何もつけない。

ここでは繰り返したい処理が 2 つあるため、繰り返し処理を多重化して、入れ子構造にする。

```
for n:0.0 thru 0.1 step 0.1  
  do(  
    for d_o:0 thru 25 step 0.1  
      do(  
        処理 1,  
        処理 2  
      ),  
    );
```

この繰り返し処理では、 $n$  が 0 のとき  $d^0$  を 0~25 まで 0.1 刻みで繰り返し、それが終わったら  $n$  が 0.1 のときの  $d^0$  を 0 から 25 まで 0.1 刻みで繰り返すという構文である。

ここでは  $n$  が 0.0 から 0.1 のため合計 500 回の処理が行われる。繰り返し処理を行う場合は一度に多くの処理を行うと時間がかかってしまうことがあるため、少ない繰り返しで処理する場合がある。

次に処理の中身を見ていく。

```

for n:0.0 thru 0.1 step 0.1
  do(
    M:matrix(["n","d_o","k_E1","k_E2","w_h","w_l","r","s_h","s_l","rs_h","rs_
l","d-(v/1+n)d_o","rs_h-d_o>0","w_l-(d-
(v/(1+n)d_o)","c_yh","c_oh","c_yl","c_ol","u_h","u_l"]),
    for d_o:0 thru 25 step 0.1
      do(
        wxplot2d([Lambda(k),Omega(k)],[k,0.0,0.5],[legend,
"Λ(k_{t+1})","Ω(k_t)"]),
        plot2d([Lambda(k),Omega(k)],[k,0.0,0.5],[legend,
"Λ(k_{t+1})","Ω(k_t)"], [png_file, concat(dir_name,"n=",n,"d_o=",d_o,"_steady-
state_equilibrium",".png")]),
        k_E1:newton(Lambda(k)-Omega(k),0.01),
        k_E2:newton(Lambda(k)-Omega(k),0.1*abs((n+0.1)*10)),
        w_h:beta*A*v^(beta-1)*(1-v)^gamma*k_E2^alpha,
        w_l:gamma*A*v^beta*(1-v)^(gamma-1)*k_E2^alpha,
        r:alpha*A*v^beta*(1-v)^gamma*k_E2^(alpha-1),
        s_h:((w_h-(d-(v/(1+n))*d_o))/(2+rho))-((1+rho)*((d-
(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o-d_o))/((2+rho)*(1+r)),
        s_l:((w_l-(d-(v/(1+n))*d_o))/(2+rho))-((1+rho)*((d-
(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o))/((2+rho)*(1+r)),
        rs_h:r*s_h,
        rs_l:r*s_l,
        x:d-(v/(1+n))*d_o,
        y:r*s_h-d_o,
        z:w_l-(d-(v/(1+n))*d_o),
        c_yh:w_h-s_h-(d-(v/(1+n))*d_o),
        c_oh:(1+r)*s_h+(d-(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o-d_o,
        c_yl:w_l-s_l-(d-(v/(1+n))*d_o),
        c_ol:(1+r)*s_l+(d-(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o,
        u_h:log(c_yh)+(1/(1+rho))*log(c_oh),
        u_l:log(c_yl)+(1/(1+rho))*log(c_ol),

```

```
M:addrow(M,[n,d_o,float(k_E1),float(k_E2),float(w_h),float(w_l),float(r),float(s_h),float(s_l),float(rs_h),float(rs_l),float(x),float(y),float(z),float(c_yh),float(c_oh),float(c_yl),float(c_ol),float(u_h),float(u_l))],
```

```
M_for_3D:addrow(M_for_3D,[n,d_o,float(k_E1),float(k_E2),float(w_h),float(w_l),float(r),float(s_h),float(s_l),float(rs_h),float(rs_l),float(x),float(y),float(z),float(c_yh),float(c_oh),float(c_yl),float(c_ol),float(u_h),float(u_l))
```

```
),
```

```
write_data(transpose(M),concat(dir_name,"n=",n,".csv"),csv),
```

```
SubM:transpose(submatrix(1, M,
```

```
1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,20)),
```

```
wxplot2d ([discrete, SubM[1], SubM[2]], [style,points],
```

```
[point_type,diamond], [color,blue],[xlabel,"d^o"],[ylabel,"u^h"]),
```

```
plot2d ([discrete, SubM[1], SubM[2]],
```

```
[style,points], [point_type,diamond], [color,blue],
```

```
[xlabel,"d^o"],[ylabel,"u^h"],
```

```
[png_file, concat(dir_name,"n=",n,".png"))],
```

```
kill(M)
```

```
);
```

上記が繰り返し処理の全体であるが、以下ではこれを部分に分けてみていく。

```
M:matrix(["n","d_o","k_E1","k_E2","w_h","w_l","r","s_h","s_l","rs_h","rs_l","d-(v/1+n)d_o","rs_h-d_o>0","w_l-(d-(v/(1+n)d_o)","c_yh","c_oh","c_yl","c_ol","u_h","u_l"])
```

まず、matrix は行列を作るというコマンドなので、上記は M という行列を作るという構文である。Excel ではこの行列は表で表示される。

次に、グラフを出力する。

```
wxplot2d([Lambda(k),Omega(k)],[k,0.0,0.5],[legend, "\Lambda(k_{t+1})","\Omega(k_t)"]),
```

最初の wxplot2d は 2 次元のグラフを作成するというコマンドである。これに続く部分は、Lambda(k),Omega(k)が縦軸、k が横軸で範囲が 0.0~0.5 までを出力するという構文である。legend というのは名前を付けるというコマンドで、グラフの名前がそれぞれ  $\Lambda(k_t + 1)$  と  $\Omega(k_t)$  になる。

```
plot2d([Lambda(k),Omega(k)],[k,0.0,0.5],[legend, "\Lambda(k_{t+1})","\Omega(k_t)"], [png_file, concat(dir_name,"n=",n,"d_o=",d_o,"_steady-state_equilibrium",".png"))],
```

これは 2 次元の画像ファイルを png 形式で出力している。concat というのは文字列を結合するという意味である。

次は一人当たり資本ストックを求めるための構文である。

```
k_E1:newton(Lambda(k)-Omega(k),0.01),
k_E2:newton(Lambda(k)-Omega(k),0.1*abs(n*10)),
```

ここではこのニュートン法を使って低位均衡  $k_{E1}$  と高位均衡  $k_{E2}$  を求めている。

ニュートン法とは初期値を与え、その初期値から二つの差分がゼロになる近似値を求める数値計算法の一つである<sup>14</sup>。

初期値は大体のあたりをつけて決める。

```
w_h:beta*A*v^(beta-1)*(1-v)^gamma*k_E2^alpha,
w_l:gamma*A*v^beta*(1-v)^(gamma-1)*k_E2^alpha,
r:alpha*A*v^beta*(1-v)^gamma*k_E2^(alpha-1),
s_h:((w_h-(d-(v/(1+n))*d_o))/(2+rho))-((1+rho)*((d-(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o-
d_o))/((2+rho)*(1+r)),
s_l:((w_l-(d-(v/(1+n))*d_o))/(2+rho))-((1+rho)*((d-
(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o))/((2+rho)*(1+r)),
rs_h:r*s_h,
rs_l:r*s_l,
x:d-(v/(1+n))*d_o,
y:r*s_h-d_o,
z:w_l-(d-(v/(1+n))*d_o),
c_yh:w_h-s_h-(d-(v/(1+n))*d_o),
c_oh:(1+r)*s_h+(d-(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o-d_o,
c_yl:w_l-s_l-(d-(v/(1+n))*d_o),
c_ol:(1+r)*s_l+(d-(v/(1+n))*d_o)*(1+n)+v*d_o,
u_h:log(c_yh)+(1/(1+rho))*log(c_oh),
u_l:log(c_yl)+(1/(1+rho))*log(c_ol),
```

上記は高位均衡  $k_{E2}$  を使って、各数値を計算している。それぞれ「名前：式」という構文になっている。

次に計算結果を保持するための行列を作る。

```
M:addrow(M,[n,d_o,float(k_E1),float(k_E2),float(w_h),float(w_l),float(r),float(s_h),f
loat(s_l),float(rs_h),float(rs_l),float(x),float(y),float(z),float(c_yh),float(c_oh),float(c_
yl),float(c_ol),float(u_h),float(u_l)]),
```

<sup>14</sup> 栗原正仁 [3] を参照。



```
M_for_3D: addrow(M_for_3D, [n, d_o, float(k_E1), float(k_E2), float(w_h), float(w_l), float(r), float(s_h), float(s_l), float(rs_h), float(rs_l), float(x), float(y), float(z), float(c_yh), float(c_oh), float(c_yl), float(c_ol), float(u_h), float(u_l)])
```

上記の M は保存用の行列である。後半の M\_for\_3D は 3D のグラフを作るための構文である。

次に計算結果を Excel に出力する。

```
write_data(transpose(M), concat(dir_name, "n=", n, ".csv"), csv),
```

write\_data はデータを書き込むというコマンドである。concat 以下は n が 0.1 の場合 Excel で "n=0.1" と表されるという構文である。

```
SubM: transpose(submatrix(1, M, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20)),  
wxplot2d ([discrete, SubM[1], SubM[2]], [style, points], [point_type, diamond],  
[color, blue], [xlabel, "d^o"], [ylabel, "u^h"]),  
plot2d ([discrete, SubM[1], SubM[2]],  
[style, points], [point_type, diamond], [color, blue], [xlabel, "d^o"], [ylabel, "u^h"],  
[png_file, concat(dir_name, "n=", n, ".png")]),  
kill(M)
```

この構文の 1 行目は行列 M のグラフに不要な成分を削除するという指示である。そのあとの構文はグラフを出力する構文である。ここまでが、繰り返し処理の内容である。最後の kill(M) は繰り返し処理の終わりを示している。

```
write_data(M_for_3D, concat(dir_name, "data_for_3D.csv"), csv);  
kill(all);
```

最後にデータを Excel に出力して終了である。

## 4.2 Stata によるプログラムでのグラフ作成手順

本節では、統計解析ソフト Stata を参考に、前節で Excel に出力したデータを用いて 3D のグラフと等高線のグラフの作成手順について述べる。

まず、3D グラフを描くためのパッケージと等高線を描くためのパッケージをインストールする。

```
ssc install graph3d  
ssc install surface
```

これは Stata を入手していればネット接続だけでインストールできる。

次に作業フォルダを指定する。

```
cd "作業フォルダ"
```

次に Maxima で作った Excel ファイルを読み込む。

```
import excel " data_for_3d.xlsx", sheet("data_for_3D") firstrow clear destring,
replace
```

次にグラフに必要なのないデータを処理する。

```
gen mod=mod(d_o,1)
drop if mod>=0.1 & mod<1.0
drop if d_o>25
```

$d^o$  を 1 で割ったあまりに対応する小数点を省き、 $d^o$  が 25 より大きいものは削除する。

次に 3D のグラフを描画する。

```
surface n d_o u_h, orient(xzy) nobox wcolor(midblue) xtitle(n)
ytitle(d{superscript:o}) ztitle(u{superscript:h})
graph export surface_uh.png, replace

graph twoway (contour u_h d_o n, levels(10) interp(thinplatespline) xlabel(-
0.9(0.1)0.9) ylabel(0(10)25) xtitle(n) ytitle(d{superscript:o}) ztitle(u{superscript:h}))
graph export contour_uh.png, replace

surface n d_o u_l, orient(xzy) nobox wcolor(midblue) xtitle(n)
ytitle(d{superscript:o}) ztitle(u{superscript:l})
graph export surface_ul.png, replace

graph twoway (contour u_l d_o n, levels(10) interp(thinplatespline) xlabel(-
0.9(0.1)0.9) ylabel(0(10)25) xtitle(n) ytitle(d{superscript:o}) ztitle(u{superscript:l}))
graph export contour_ul.png, replace
```

$n$  と  $d^o$  と  $U^h$  の軸を指定する。その後、色の指定、ラベルの名前、軸のメモリの間隔を指定し、グラフを保存する。

最後に等高線のグラフを描写する。

```
import excel " data_for_3d.xlsx", sheet("Table") firstrow clear
rename 最大値 uh u_h
rename uh を最大化する do の水準 d_o
graph twoway (connected d_o n, xtitle(n) ytitle(d{superscript:o}))
graph export scatter_uh_do.png, replace
graph twoway (connected d_o n if n >=-0.5 & n<=0.5, xtitle(n)
ytitle(d{superscript:o}))
graph twoway (connected d_o n if n >=-0.4 & n<=0.4, xtitle(n)
ytitle(d{superscript:o}))
```

```
graph twoway (connected d_o n if n >=-0.3 & n<=0.3, xtitle(n)
ytitle(do))
graph export scatter_uh_do_Enlarged.png, replace
```

まず、Maxima で作った Excel データを読み込む。 $n$  と  $d^o$  の軸を指定する。等高線の色の間隔を指定する。最後にグラフを保存する。

### おわりに

本章では、数値計算によって定常状態の一人当たり資本ストックをシミュレーション分析によって求めるためのプログラムの作成手順を詳細に示した。次章にて、このプログラムによって行われたシミュレーション分析の結果を検討する。

### 参考文献

- [1] Maxima.sourceforge.io. (2022), 「Maxima, コンピューター代数システム」, バージョン 5.46.0, <https://Maxima.sourceforge.io/>
- [2] (株)ライトストーン 「Stata : 研究者向けの統計解析ソフトウェア」 <https://www.lightstone.co.jp/stata/index.html>
- [3] 栗原正仁 (2011), 『わかりやすい 数値計算入門【第2版】』ムイスリ出版株式会社.

## 第5章 シミュレーション分析

### はじめに

第3章にて図を中心に見てきたように、人口成長率を組み込んだ定常状態  $k^*$  は  $\Lambda(k^*) = \Omega(k^*)$  を満たすものとして得られる。しかしこの定常状態の資本ストックを、(3.17)から数学的に計算することはできない。そこで本章では、シミュレーション分析によって高位均衡と低位均衡が存在するようなパラメータセットの存在を明らかにする。特に本章では、人口成長率  $n$  と高所得老年者の保険料  $d^o$  との関係に焦点を当て、高位均衡と低位均衡の存在性と均衡の変化を分析する。さらに、高位均衡における高所得者と低所得者の生涯効用についてもシミュレーション分析を行う。なお、以下の計算プログラミングの詳細については第4章に記述している。

### 5.1. シミュレーション分析

まず、外生パラメータの値を次のように設定する。

$$\alpha=0.4, \beta=0.4, \gamma=0.2, \rho=0.9, A=10, v=0.01, d=0.09.$$

ここで、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\rho$ 、 $A$ 、 $v$  については第2章と同じ値を用いている。 $d$  については、保険料に関する制約条件(3.5)を満たすような範囲として、0.09で設定している。

これらの外生パラメータもとで、 $d^o$  と  $n$  の値を変化させた場合の高所得者の生涯効用  $U^h$  のグラフを求めると、図5.1のようになる。

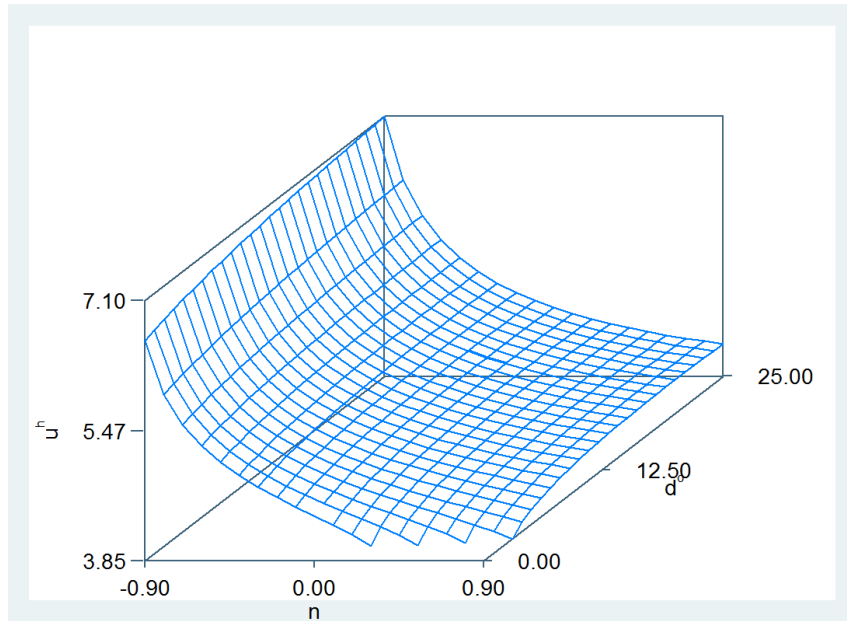


図 5.1 :  $U^h$  と  $d^o$  と  $n$  の関係

この図の等高線を等生涯効用線と呼ぶことにする。このグラフを描いたものが次の図 5.2 である。

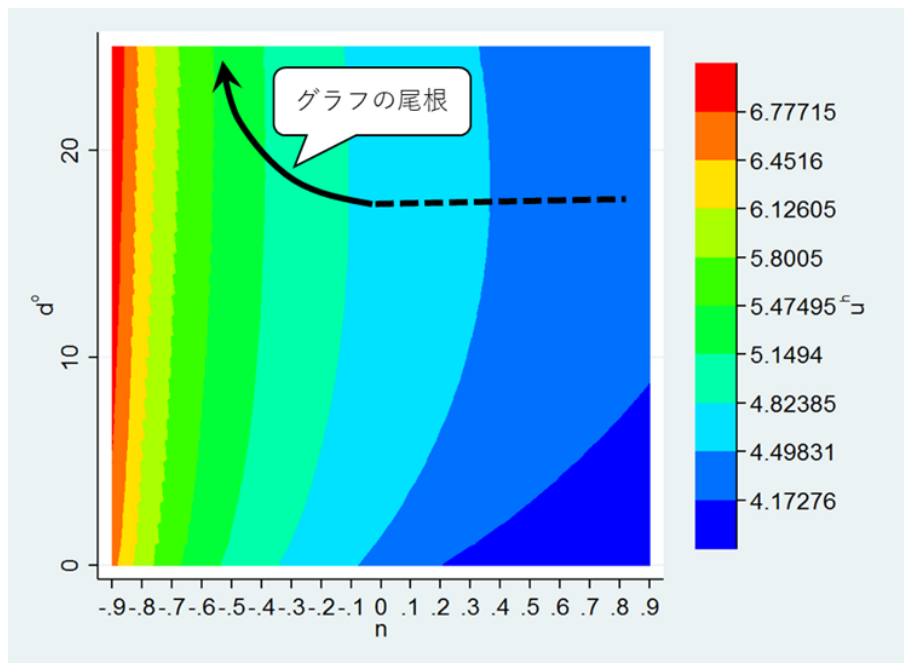


図 5.2 :  $U^h$  の等生涯効用線

ここで、 $-0.9 \leq n \leq 0.9$  の範囲で、 $U^h$  を最大にする  $d^o$  の値を求めたものが、次の表 5.1 である。

$n$	最大化された $u^h$ の値	$u^h$ を最大化す る $d^o$ の水準
-0.9	7.39	133.1
-0.8	6.37	52.4
-0.7	5.87	33.5
-0.6	5.56	26.0
-0.5	5.34	22.3
-0.4	5.17	20.3
-0.3	5.03	19.1
-0.2	4.92	18.5
-0.1	4.82	18.16
0	4.73	18.03
0.1	4.66	18.04
0.2	4.59	18.1
0.3	4.53	18.3
0.4	4.48	18.5
0.5	4.43	18.7
0.6	4.39	19.0
0.7	4.35	19.3
0.8	4.31	19.5
0.9	4.28	19.8

表 5. 1 : 人口成長率と高所得者の生涯効用を最大化する  $d^o$  の値

表 5.1 の各  $n$  に対して  $U^h$  を最大にする  $d^o$  の値を  $d^{o*}$  とし、両者の関係をグラフにしたものが図 5.3 である。

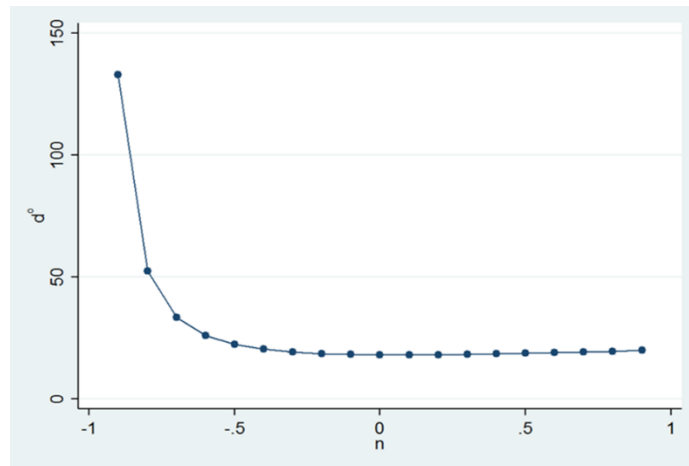


図 5.3 :  $U^h$  を最大にする  $d^o = d^{o*}$  のグラフ

## 5.2. 人口減少社会における望ましい高所得老年者の保険料

表5.1および図5.3の人口減少領域  $-0.9 \leq n \leq 0.9$  に注目すると、次のことがわかる。

**Remark 1:** 人口減少率が大きいほど、高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなる。

この **Remark 1** の最適な保険料は、図5.2に描かれているグラフの「尾根」に対応している。つまり、横軸上のある値に人口成長率を選択すると、高所得者の生涯効用を最大にする高所得老年者の保険料は、選択された  $n$  から垂直線を伸ばし、その垂直線と等生涯効用線の接点で求められる。この接点をあらゆる  $n$  との関係で求めると、図5.3のグラフとして求めることができる。

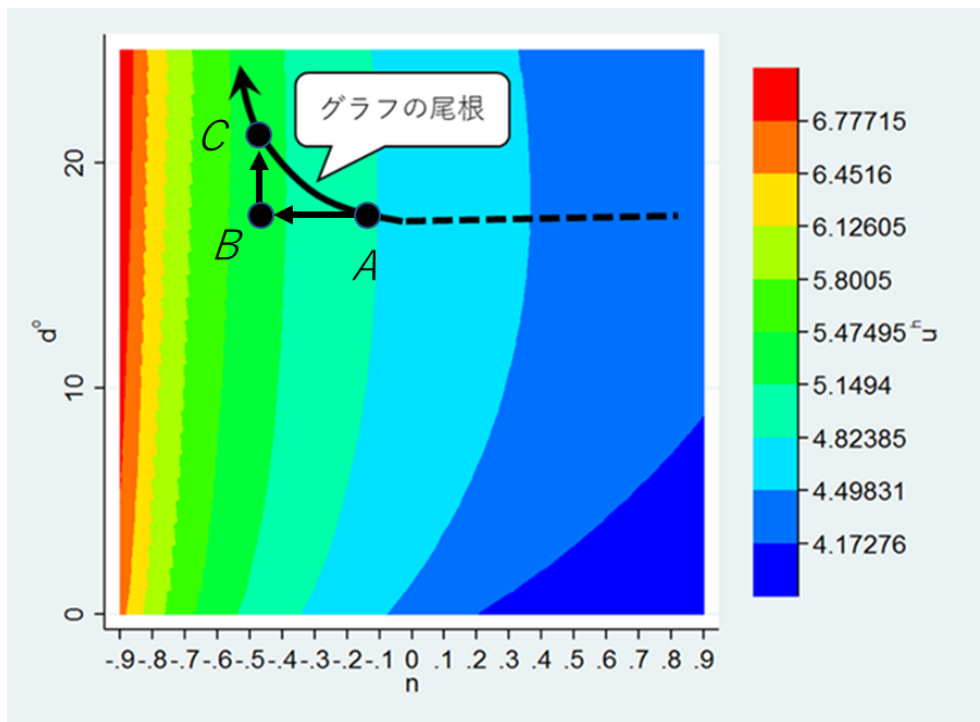


図5.4 : Remark 1の図解

この Remark 1 は、第3章の議論を用いると次のように説明することができる。まず、当初の状態が図5.4のA点であるとする。ここで、人口成長率が減少し、B点に状態が変化すると、第3章の図3.3の議論で明らかにしたように安定的な定常状態の資本ストックが増加する。これは高所得者と低所得者の若年期と老年期のすべての消費を押し上げる効果をもつので、特に高所得者の生涯効用も増加する。次に、B点から高所得老年者の保険料を増加させると、同じく第3章の動学分析の最後に述べたように、定常状態の資本ストックは増加する。これも、高所得者と低所得者の若年期と老年期の消費を押し上げる効果をもつ。しかし、高所得老年者の保険料負担が増加するため、彼らの可処分所得の増加が抑制（もしくは減少）し、これは消費を押し下げる効果をもつ。B点からC点への変化においては、この2つの効果のうち消費を押し上げる効果が勝り、高所得者の生涯効用は増加する。しかし、高所得老年者の保険料が一定の水準を超えて増加すると、高所得老年者の消費の減少効果が大きくなり、高所得者の生涯効用は減少に転じる。以上のことから、図の最適な保険料は人口成長率の（マイナス領域での）低下に伴い増加する。

次に、 $d^o$  と  $n$  の値を変化させた場合の低所得者の生涯効用  $U^l$  のグラフは図5.5のようになる。



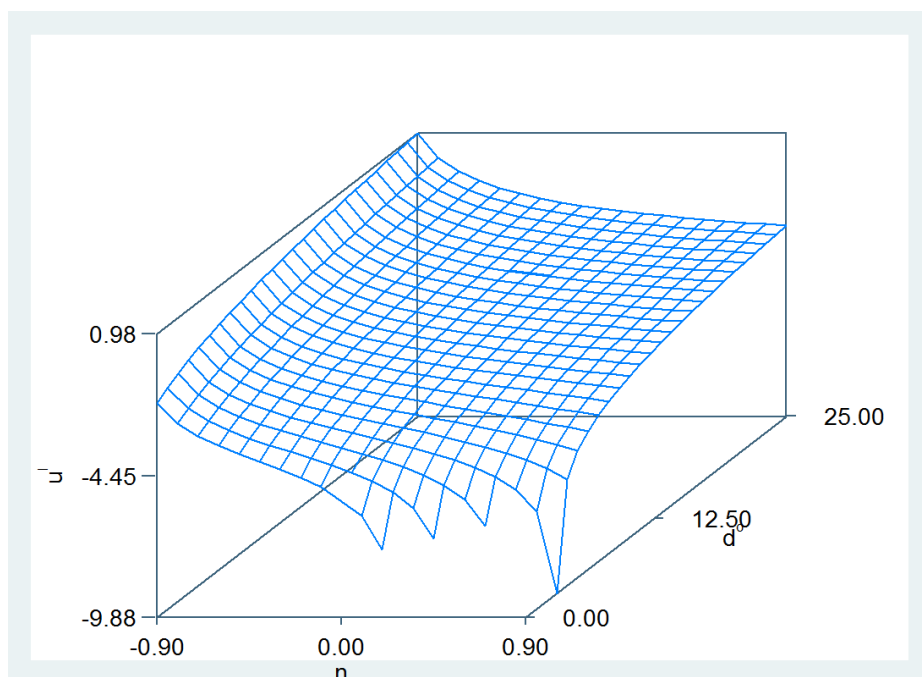


図 5.5 :  $U^l$  と  $d^o$  と  $n$  の関係

この図の等生涯効用線を描いたものが次の図 5.6 である。

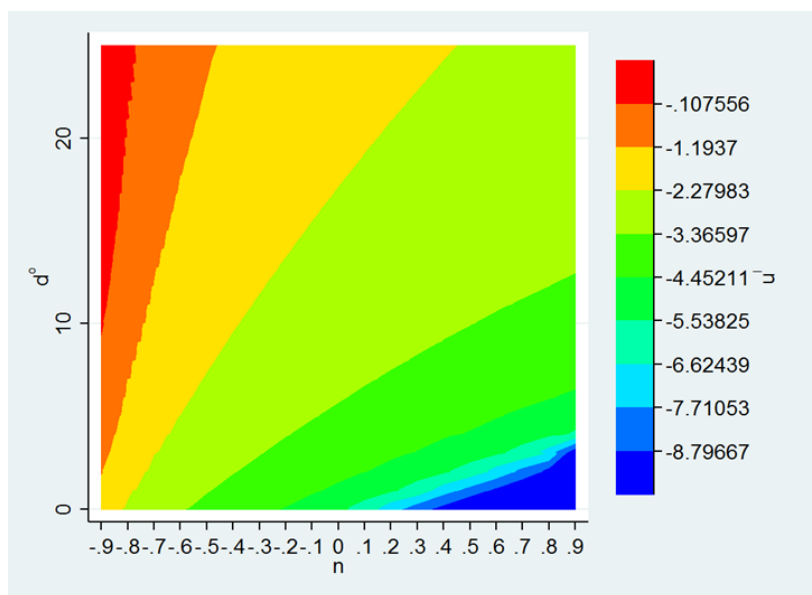


図 5.6 :  $U^l$  の等生涯効用線

図5.5より、各  $n$  の値に対して、 $d^o$  が大きければ大きいほど低所得者の生涯効用  $U^l$  の値は大きくなることがわかる。これは、高所得老年者からの所得のトランスファー効果による。

図5.1、図5.2、表5.1、図5.6より、次のことが明らかになる。

**Remark 2:** 高所得老年者が保険料を負担しない現行方式と比較して、定常状態での高所得者と低所得者の生涯効用はともに高くなる。

図5.3の  $d^{o*}$  は、図5.1や図5.2のグラフの尾根に対応する  $d^o$  の値である。このとき、図5.2の尾根の部分（つまり、 $d^{o*}$ ）の  $U^h$  と、 $d^o = 0$  の  $U^h$  を比較すれば、 $d^{o*}$  の  $U^h$  が大きいことが確認できる。また、図5.6では、各  $n$  に対して  $d^o > 0$  での  $U^l$  が、 $d^o = 0$  の  $U^l$  を上回っていることが確認できる。以上のことから **Remark 2** がいえる。なお、この **Remark 2** は  $n = 0$  においても成立する。したがって、この帰結は第2章の議論を拡張したものである。

最後に、次のことも確認できる。

**Remark 3:** 高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料が存在する。

**Remark 3** の合意可能な保険料とは、**Remark 2** の説明で述べた  $d^{o*}$  である。 $d^o$  をゼロから徐々に高くしていった場合を考えよう。 $d^o < d^{o*}$  である限りは  $U^h$  と  $U^l$  の双方が増加する。したがって、この領域で  $d^o$  を高くする政策は、高所得者と低所得者の双方で合意可能となる。そして、高所得者は  $d^o = d^{o*}$  までは合意する。しかし、これ以上に高い値になると、高所得者が反対する。したがって、高所得者と低所得者の双方が合意可能で、全体の総効用を最大にする高所得老年者の保険料は  $d^{o*}$  であることがわかる。なお、この **Remark 3** も  $n = 0$  のケースを含んでいる。したがって、本章の帰結は第2章で論じた高所得者と低所得者の間での合意可能な保険料の議論を拡張したものである。

## おわりに

本章では、人口減少社会において高所得老年者が年金の支え手に加わることでの高所得者と低所得者の生涯効用の変化と、社会全体にとって望ましい「高所得老年者の保険料負担水準」の存在性について、シミュレーション分析を行った。その結果、以下のことが明らかとなった。

- (1) 高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料が存在する (**Remark 3**)。
- (2) 高所得老年者が保険料を負担しない現行方式と比較して、高所得者と低所得者の生涯効用はともに高くなる (**Remark 2**)。

(3) 人口減少率が大きいほど、高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなる (Remark 1)。

最後に今後の課題を述べる。今回のシミュレーション分析で得られた結果は定常状態に限定して導かれたものである。しかし、政策の変更による移行過程を考えた場合、政策の初期の高所得老年者の効用が低下することから、その世代の生涯効用は必ず低下してしまう。したがって、移行過程を明示的に分析することは重要な課題と思われる。

さらに、国債発行によるパレート効率的な所得再分配政策の存在性についても検討する必要がある。つまり、政策の初期の高所得老年者の効用を一定もしくはそれ以上に維持するだけの補助政策を政府が取り、その財源を国債発行で調達することを考える。このときの国債の返済を、その後のすべての世代の効用が低下しないようにわずかずつ負担させることで、政策初期の高所得者から無現先までの世代に至る全世代の効用を高めることが可能になるかもしれない。このような国債発行による異時点間の所得移転スキームが存在するかを分析すること重要な課題である。

## 参考文献

- [1] Alessandro Cigno (1993). “Intergenerational transfers without altruism: Family, market and state”. *European Journal of Political Economy* 9(4), 505-518.
- [2] Giam Pietro Cipriani (2014), “Population aging and PAYG pensions in the OLG model”, *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256.
- [3] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), “Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model”, *Journal of Population Economics* 25(3), 955-961.
- [4] 二神孝一 (2012), 『動学マクロ経済学: 成長理論の発展』日本評論社.
- [5] Akira Kamiguchi (2021), “Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model”, 2021 年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.
- [6] Karabarbounis, L and B. Neiman (2014), “The Global Decline of the Labor Share,” *The Quarterly Journal of Economics* 129, 61-103.
- [7] Akira Momota and Ryo Horii (2013), “Timing of childbirth, capital accumulation, and economic welfare”, *Oxford Economic Papers*, 65(2),494-522.
- [8] Koton Tanigawa and Tomoya Sakagami (2021), “Pay-as-you-go pension systems supported by the old rich”, *Kyoto Institute of Economic Research Discussion Paper Series*, No.1067, Kyoto University.

## 終章

本研究では公的年金制度の持続可能性の問題について論じた。特に、少子高齢化に伴う人口減少社会における公的年金の持続可能性を高める政策として、高所得老年者が賦課方式年金の支え手に加わることを提言した。若年世代と老年世代のそれぞれにおいて高所得者と低所得者が存在する2世代 OLG モデルを構築し、若年世代に加え、老年世代の中で高い資産所得を得ている人々にも年金の保険料を負担する政策を導入した。これを理論分析とシミュレーション分析により明らかにした。

第1章では OLG モデルを用いて公的年金政策を論じるために、OLG モデルの基本構造について述べた。

第2章では賦課方式年金制度のもと、年金負担の世代間格差を是正し、年金制度が長期的に持続可能となる新しい年金政策を提案した。具体的には、若年世代に加えて、高い資産所得を得ている老年世代も保険料を負担するモデルを構築した。そこで高所得の老年者が保険料を負担することで安定的な定常状態の資本ストックは増加することを明らかにした。さらに、高所得の老年者の負担を高めれば高めるほど、定常状態の資本ストックは増加することも示すことができた。さらに、この年金制度を導入していない現行方式と比較して、定常状態での高所得者と低所得者の双方の効用水準はともに増加することも明らかにした。さらに、高所得者と低所得者の双方が合意可能な、高所得者の保険料水準が存在することも、シミュレーション分析で明らかにした。

第3章では第2章で述べたモデルに人口成長率を導入したモデルを分析した。その結果、人口が増加することで、安定的な定常状態の資本ストックは減少することを明らかにした。

第4章では数値計算によって定常状態の一人当たり資本ストックをシミュレーション分析によって求めるためのプログラムの作成手順を示した。

第5章では人口減少社会において高所得老年者が年金の支え手に加わることでの高所得者と低所得者の生涯効用の変化と、社会全体にとって望ましい「高所得老年者の保険料負担水準」の存在性について、シミュレーション分析を行った。その結果以下のことが明らかになった。(1) 高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料が存在する。(2) 高所得老年者が保険料を負担しない現行方式と比較して、高所得者と低所得者の生涯効用はともに高くなる。(3) 人口減少率が大きいほど、高所得老年者の負担する最適な保険料は大きくなり、この保険料に対応する高所得者の生涯効用は高くなる。

今後の課題として、第2章、第5章のシミュレーション分析で得られた結果

は定常状態に限定して導かれたものである。しかし、政策の変更による移行過程を考えた場合、政策の初期の高所得老年者の効用が低下することから、その世代の生涯効用は必ず低下してしまう。したがって、移行過程を明示的に分析することは重要な課題と思われる。

さらに、国債発行によるパレート効率的な所得再分配政策の存在性についても検討する必要がある。つまり、政策の初期の高所得老年者の効用を一定もしくはそれ以上に維持するだけの補助政策を政府が取り、その財源を国債発行で調達することを考える。このときの国債の返済を、その後のすべての世代の効用が低下しないようにわずかずつ負担させることで、政策初期の高所得者から無限先までの世代に至る全世代の効用を高めることが可能になるかもしれない。このような国債発行による異時点間の所得移転スキームが存在するかを分析することは重要な課題である。