

熊本学園大学産業経営研究第43号抜刷

2024年3月発行

企業情報の質的水準と
アナリスト予想のタイミング
——私的開示のケース——

小 谷 学

熊 本 学 園 大 学

産 業 経 営 研 究 所

企業情報の質的水準とアナリスト予想のタイミング

——私的開示のケース——

小 谷 学

1 はじめに

本研究の目的は、企業による情報開示の質的水準（情報の質あるいは精度）とアナリスト予想の提供タイミングがどのように決定されるかを、数理的に明らかにすることである。よく知られているように、アナリスト予想は迅速に発行される傾向がある。例えば、Livnat and Zhang (2012) は100万通を超えるアナリスト・レポートを調査し、その56%が決算発表や10-K、10-Q、8-Kの提出日から3日以内に提供されていることを析出した。また、Altinkilic et al. (2013) は、アナリストによる予想改訂の9割超について、3日前から当日までに実績利益や予想利益の発表が行われていることを明らかにしたうえで、アナリストは公的情報におんぶ（piggyback）されていると指摘している。類似の傾向は、我が国でも観察される。例えば、野間（2008）は、経営者予想が公表されると、その1営業日後から3営業日後までの間に、アナリスト予想は経営者予想値へ向けて大きく修正されることを明らかにしている。では、なぜアナリストはこのように迅速に予想を提供するのだろうか。予想提供のタイミングはどのような要因によって決まるのだろうか。

Altinkilic and Hansen (2009) のアーカイバル研究によれば、アナリスト・レポートの大部分が企業情報の発表後に迅速に提供されている

のは、アナリストが自身のキャリアを考慮して、戦略的にニュースに追従しているからであるとされる。一方、数理モデル研究の分野では、Guttman (2010) が上記の経験的事実の解明に貢献している。彼は2人のアナリストが戦略的に予想提供のタイミングを決定するモデルに基づき、提供のタイミングが正確性と適時性のトレードオフによって決定されることや、予想提供タイミングが同一時点に集中する原因を明らかにした。

本研究ではGuttman (2010) で示されたプラットフォームに基づいて、同研究を発展させる。Guttman (2010) は本分野における先駆的研究であるが、以下のような克服すべき点を抱えていると考えられる。第1に、そのモデルにおいて、アナリスト予想の精度は、彼がもともと保有している予測能力から生じる要素と、公的情報の解釈によって生じる要素の2つから構成されている。そして、前者については、それがどのようにして獲得されたのか明らかにされることなく、外生的に与えられている。しかしながら、アナリストが私的に保有する予測能力は、企業とのコミュニケーションを通じて生成されていると考えるべきであろう^{*1}。つまり、企業は何らかの目的をもって、アナリストに対して私的に情報を提供しており、アナリストはその情報を所与として予想行動をとっていると考えられる^{*2}。したがって、アナリストの予想

^{*1} Brown et al. (2015) では、アナリストは経営者と私的な接触を持つことをきわめて重視している点が明らかにされている。

行動と企業による情報提供行動は、切り離された問題として捉えられるべきではなく、同時に分析されなければならないであろう。本研究では、Guttman (2010) のフレームワークに企業を導入し、アナリストと企業の相互作用を分析する。具体的に言うと、本研究では、アナリスト予想の精度を構成する2つの要素のうち、前者は企業とのコミュニケーションによって決定されると考える。こうすることで、アナリストの予測能力の水準を内生化しているのである。

克服すべき第2の点は、投資家の取引行動に関する仮定に関係している。Guttman (2010) では、アナリスト予想を入手した投資家は、その予想に基づいて株式の売買を行う。そこでは、市場における株式の供給量を一定としているにもかかわらず、投資家は微小なためその取引は価格に影響を与えないと仮定されている。しかしながら、株式の供給量が固定されていて、情報に通じた投資家が発注を行う以上、取引が価格に影響しないという仮定は矛盾を含んでいる。そのような場合、情報に通じた投資家の取引は完全に情報を顕示することになり、取引相手はそれを予想するため、彼は利益をあげられないはずである。それに対し、本研究では、マイクロストラクチャーのフレームワークを援用することにより、この欠陥を修正している。具体的には、本研究では情報トレーダー、ノイズ・トレーダー、およびマーケット・メーカーからなる証券市場を想定した。そこでは、ノイズ・トレーダーによるランダムな取引が行われるため、アナリスト予想に基づいて行われる情報トレーダーからの発注は完全には情報を顕示せず、情報トレーダーには利益を獲得する機会が生まれる。この点で、本研究は先行研究の論理的な弱点を克服していると思われる。

以上のように、本研究では、Guttman (2010) に企業というプレイヤーとマイクロストラクチャーのフレームワークを組み入れる。こうす

ることで、より頑健な設定のもとで、企業の情報開示水準とアナリスト予想の関係について、リッチなインプリケーションを得ることができると考えられる。

本研究では、分析のベンチマークとして、企業がアナリストに対してのみ任意に情報提供を行うような私的開示のケースを分析した。具体的には、企業はアナリストとの間で私的にコミュニケーションをはかり、資産価値に関する情報を提供する。企業には、できるだけ早期にリスク資産価格の情報効率性を高めようとする動機がある。一方、アナリストは企業とのコミュニケーションを通じて高めた予測能力と、公的情報を解釈することで得た予測能力をもとに、資産価値に関する予想を形成する。アナリストはその予想を情報トレーダーに対して販売し、アナリストから予想を購入した情報トレーダーは、その予想情報に基づいて取引を行うことで利得を得る。

時間の経過に伴って公的情報は正確になってゆくことから、アナリスト予想も正確性を増すことになり、そのぶん情報トレーダーにとっての価値は高まることになる。その一方で、公的情報の正確性が向上することにより、他の市場参加者が入手する情報の精度も高まり、アナリスト予想の優位性は低下してゆく。つまり、アナリスト予想の価値に関しては、正確性と迅速性の間にトレードオフがある。このようなトレードオフを考慮して、アナリストは情報トレーダーにとっての価値を最大化するように、アナリスト予想の提供タイミングを決定するのである。

逆向き推論法による分析の結果、企業によるコミュニケーションの最適水準とアナリスト予想の最適なタイミングを閉じた形で表すことができた。また、比較静学を通じて、各種のパラメータが開示水準、予想提供タイミング、およびプレイヤーの厚生に与える影響を考察した。

*2 このような見方は、Kim and Song (2014) や Langberg and Sivaramakrishnan (2008) でも提示されている。

本研究の構成は以下のとおりである。第2節では、モデルの設定について述べる。第3節では、ゲームの均衡について考察する。第4節では、比較静学の結果を示す。第5節は結論である。

2 モデルの設定

本研究のゲームは2つのステージから構成される。第1ステージは企業とアナリストの2人の中でプレイされる。それに対し、第2ステージは、情報トレーダー、ノイズ・トレーダー、およびマーケット・メーカーの3人の中でプレイされる。全てのプレイヤーはリスク中立的であるとする。以下では、第1ステージ、第2ステージの順に、それぞれのゲームの設定について述べる。

2.1 第1ステージ

アナリストは時点0から始まり時点1で終わる期間 $(0, 1)$ の中のある時点 t で、リスク資産の価値 \tilde{d} について、投資家に対して予想を提供する^{*3}。つまり $t \in (0, 1)$ である。 \tilde{d} は正規分布に従う確率変数であるとする。ここに、

$$\tilde{d} \sim N(\bar{d}, \sigma_d^2) \quad (1)$$

である。時点0において \tilde{d} の実現値は決まるものの、企業もアナリストも \tilde{d} の実現値それ自体は知らない。ただし、株式の価値がこの確率分布に従って発生することは知っているとしよう。なお、 $1/\sigma_d^2 = \rho_d$ と表すことにする。

企業は時点0において、アナリストとコミュ

ニケーションを図る。例えば、経営者はアナリストとの間で、個別の取材対応やIRミーティングなどを行っていることを想起されたい^{*4}。一般に、企業とアナリストとの間には情報の非対称性があり、企業は自社の価値に関してより多くを知っているであろう。そのような企業とコミュニケーションを図ることによって、アナリストは情報を入手し、株式の価値に対する予測能力を高めるのである。

さて、企業とアナリストの間でコミュニケーションが行われた後は、時間の経過に伴って、株式の価値に関する公的情報が広まってゆく。この公的情報の代表例としては、メディアからのニュースやマクロ経済データなどがある。公的情報は連続的に発信されており、このゲームのプレイヤー（企業、アナリスト、情報トレーダー、ノイズ・トレーダー、およびマーケット・メーカー）はそれを受信する^{*5}。こうして時点 t までに獲得された公的情報を $y(t)$ として表す。具体的には、この情報は株式の価値にノイズを加えたシグナルとして表されるとする。すなわち、

$$\tilde{y}(t) = \tilde{d} + \tilde{\varepsilon}_y(t), \quad \tilde{\varepsilon}_y(t) \sim N(0, \sigma_y^2(t)) \quad (2)$$

である。ここに、 \tilde{d} と $\tilde{\varepsilon}_y(t)$ は互いに独立であるとする。以下では、 $\tilde{\varepsilon}_y(t)$ の精度を $\rho_y(t)$ で表す。つまり、 $\rho_y(t) = 1/\sigma_y^2(t)$ である。連続型の時間設定のもとでは、時が経つにつれ、 $\sigma_y^2(t)$ は連続的かつ滑らかに減少する。したがって、 $t_1 < t_2$ ならば常に $\rho_y(t_1) < \rho_y(t_2)$ である。本研究では、 $\rho_y(t)$ に関して以下の仮定を置く。

^{*3} 以下、表記の簡単化のため、リスク資産を「株式」、リスク資産の価格を「株価」と表す。

^{*4} Reg FDの導入によって企業とアナリストの間の接触が抑制されたとの見方があるが、その一方で根強く存続しているという見方もある。例えば、Brown et al. (2015) の調査では、アナリストの半数以上が年間5回以上にわたって経営者と接触していること、およびその手段として電話を重視していることが判明した。また、Soltes (2014) は、Bank of New York の調査を取り上げ、企業のCFOは平均して職務時間の30%を、セルサイド・アナリストを含む投資業界の対応に費やしていること、Reg FDの施行後もアナリストと経営者の間の接触は盛んに行われていることを指摘している。

^{*5} 本稿では、ノイズ・トレーダーはランダムに発注を行う主体であると見ている。つまり、彼は公的情報を観察できるが、それを利用した行動はとらず、ランダムに発注量を決定する。

(仮定)

$t \in (0, 1)$ について, $\rho_y(t) = t$ である。

つまり, 図1の左側のように, $\rho_y(t)$ は時間 t の経過に伴って, 45° の勾配で直線的に増加するという前提を置く。縦軸に $\sigma_y^2(t)$ をとった場合, 時間 t との関係は図1の右側のように表すことができる。この $\rho_y(t) = t$ という仮定は, 計算を単純化するためだけのものではない。それは, 時間の経過に伴って生じる予測精度の向上について, 我々が抱えている直観を表現したものである^{*6}。

さて, アナリストは公的情報を入手すると, この情報を解釈したうえで, アナリスト予想として顧客である情報トレーダーに提供する^{*7}。アナリスト予想はシグナル $z(t)$ として表されるものとする。ここに,

$$\bar{z}(t) = \bar{d} + \bar{\varepsilon}_z(t), \quad \bar{\varepsilon}_z(t) \sim N(0, \sigma_z^2(t)) \quad (3)$$

である。 \bar{d} と $\bar{\varepsilon}_z(t)$, $\bar{\varepsilon}_y(t)$ と $\bar{\varepsilon}_z(t)$ は互いに独立であるとする。時点 t におけるアナリスト予想の誤差の精度は $\rho_z(t)$ で表される。つまり, $\rho_z(t) = 1/\sigma_z^2(t)$ である。

本研究では, $\rho_z(t)$ は2つの要素から構成されると想定する。第1の要素は定数であり, 第2の要素は $\rho_y(t)$ の増加関数であるとする。具体的には, 時点 t における $\rho_z(t)$ は, 以下のような線形関数として表されるとする。

$$\rho_z(t) = F_0 + \alpha \cdot \rho_y(t) \quad (4)$$

ここに, F_0 は企業とのコミュニケーションを通じて向上した予測能力を表している。アナリストがそのような能力を習得できるか否かは, 企業によって決定されるため, F_0 の値はゼロをとりうることにしている。つまり, $F_0 \geq 0$ で

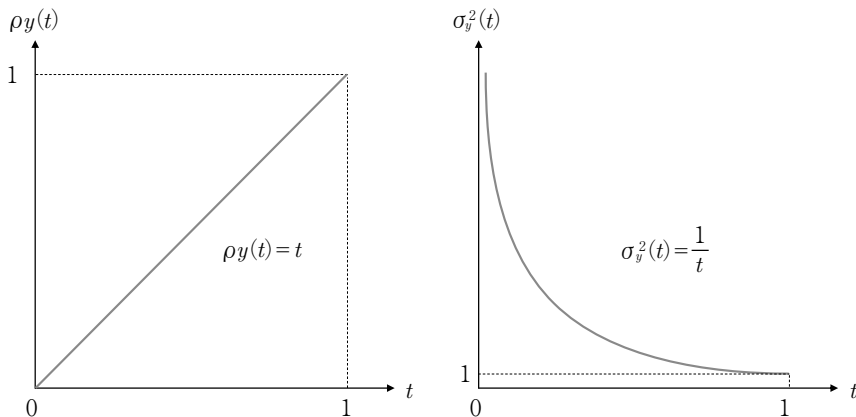


図1 $\rho_y(t)$ および $\sigma_y^2(t)$ の形状

^{*6} 株式価値に関わる様々なニュースが標本として採取されたうえで, それらの標本から公的情報が生成されているとしよう。そして, この採取できる標本の個数 (これを N とする) は, 時間の経過に伴って直線的に増加するとしよう。統計学の分野で知られているように, 平均が μ で分散が σ^2 の無限母集団から, 無作為抽出によって大きさ N の標本を抽出するとき, 標本平均 \bar{x} の平均 $\mu_{\bar{x}}$ と分散 $\sigma_{\bar{x}}^2$ について, $\mu_{\bar{x}} = \mu$ および $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/N$ が成り立つ (例えば, 岩田(1983)の79頁を参照)。したがって, 標本平均の精度, すなわち $\sigma_{\bar{x}}^2$ の逆数である N/σ^2 は時間の経過に伴って直線的に増加してゆくことになる。公的情報の誤差 $\varepsilon_y(t)$ を時点 t までに採取された標本の標本平均とみれば, $\rho_y(t) = t$ という線形性の仮定は自然なものであると考えられよう。

^{*7} アナリストは公的情報を観察すると即時にアナリスト予想を提供する。なぜなら, 公的情報の精度が連続的に高まる以上, 時間を徒過するとアナリスト予想の優位性は低下するからである。

あるとする。ここに F_0 がゼロのケースとは、アナリストにとって企業とのコミュニケーションから何も得られない場合を意味している。また α はアナリストの情報解釈能力を表したパラメータであり、 $\alpha > 0$ であるとする。アナリストは公的情報を入手すると、知識や経験をもとにそれを分析し、新情報に変換する。このことを表すために、(4)式において、 $\rho_y(t)$ と α の積を導入している。なお、(4)式のように、アナリストの予測能力の源泉を2つに分ける見方は特異なものではない。これまでに複数の研究が、アナリスト予想の価値の源泉を「情報の探索」と「情報の解釈」という2つのカテゴリーに分類している^{*8}。これらに即していえば、(4)式の F_0 は情報の探索から生じる予測能力を、 $\alpha \cdot \rho_y(t)$ は情報の解釈から生じる予測能力を表しているとみることができる。なお、 $\rho_z(t)$ の定式化に関して、Guttman (2010)と相違するのは次の2点である。第1に、先行研究では $\rho_z(t)$ を $\rho_y(t)$ の狭義凹関数と仮定しているのに対し、本研究では分析の簡単化のため線形関数と仮定している。第2に、より重要なことだが、先行研究では F_0 を外生変数と想定していたのに対し、本研究では内生変数とみている。その理由は、先述したように、 F_0 は企業とアナリストの関係の中で決定されるからである。

さて、アナリストは顧客である情報トレーダーに予想を提供して報酬を得る。この報酬を表現するために、本研究ではアナリストは予想を1人の情報トレーダーに提供すると想定している。情報トレーダーは、他の市場参加者

(マーケット・メーカーおよびノイズ・トレーダー)の知り得ない情報を入手して信念を更新し、即時に株式取引を行う^{*9}。分析を簡単化するため、アナリスト予想を入手した後に、情報トレーダーは1回だけ取引を行うものとしよう。アナリスト予想を入手することの見返りとして、情報トレーダーはアナリストに対価を支払う。Guttman (2010)の設定に従って、アナリストは独占的立場にあり、情報トレーダーの利益を全て吸い上げることができるとみなす。後述するように、アナリストが情報トレーダーから得る利得は、予想提供タイミングの関数となる。そして、最適なタイミングは、その時点における公的情報と、アナリストが企業から入手した情報の精度によって決定される。

次に、企業の行動について述べよう。本研究では、企業は株価の情報効率性 (price efficiency) を高めることを目標としているとする。Fishman and Hagerty (1989)は、株価の情報効率性を高めるために、企業は情報開示を行う動機を持つことを明らかにしている。つまり、株価の情報効率性が上昇すると、経営者による過少投資問題が緩和され、実体的な効率性 (real efficiency) が向上するため、企業は自発的に情報開示を行う動機を持つのである。一般的に、証券市場での取引を通じて早期のうちに株価の情報効率性が高まるほど、企業はより有利になるであろう。本稿では、企業はできる限り迅速に株価の情報効率性を高めたいという動機を持っているものとする^{*10}。以下では、株価の情報効率性を v とし、株式の清算価値 d と

^{*8} Ivkovic and Jegadeesh (2004), Ramnath et al. (2008), Chen et al. (2010), Livnat and Zhang (2012), Huang et al. (2018)などを参照。

^{*9} 情報トレーダーはアナリスト予想を入手すると即座に取引を行う。なぜなら、時間が経過すると、その間に公的情報の精度が高まるため、彼の優位性は減少するからである。

^{*10} 株価の情報効率性の向上が企業にプラスの実体的な影響をもたらす点は、複数の先行研究によって明らかにされている。例えば、Holmstrom and Tirole (1993)では、株価の情報効率性が上昇するほど、企業は経営者に対して株価に基づく業績指標のウェイトを高めることで、報酬契約の効率性を高めることができるとしている。また、Goldstein and Yang (2017)は株価の情報効率性が向上すると、経営者は株価を観察することによって、より効率的な投資を行いうることを指摘している。このような株価の情報効率性と実体的な効率性の関係性については、Bond, Edmans, and Goldstein (2012)のレビューが詳しい。

株価 p を用いて、 $1/\text{Var}(d|p)$ と定義する^{*11}。

企業はアナリストとのコミュニケーションを通じて、株価の情報効率性を高めるよう努力する。モデルの記号を用いて言う、企業は F_0 の値を決定することによって、 v を高めるのである。一方、 v を高めるために要した時間が長いほど、企業には逸失利益が生じると考えられる。このコストは、係数を $c(>0)$ として、時間 t の上昇に伴って、通増的に発生するものとする。以上のことから、企業の期待利得を $E\psi$ とすると、目的関数は以下のとおり表される。

$$\begin{aligned} & \max_{F_0} E\psi \\ & = \max_{F_0} v - c \cdot t^2 \end{aligned} \quad (5)$$

なお、第1ステージのゲームにおいて、 $y(t)$, σ_d^2 , $\sigma_y^2(t)$, $\sigma_z^2(t)$, σ_u^2 , α , および c については、企業とアナリストの間の共有知識であり、 $z(t)$ についてはアナリストだけが知っているものとする。

2.2 第2ステージ

第2ステージのゲームは、マイクロストラクチャーの標準的なフレームワークである Kyle (1985) と同様に、情報トレーダー、マーケット・メーカー、およびノイズ・トレーダーの3人によってプレイされる。第1ステージのゲームでアナリストから情報を購入した情報トレーダーは、アナリスト予想 $z(t)$ と公的情報 $y(t)$ をもとに、時点 t において発注量 a を決定する。次に、ノイズ・トレーダーは無作為に発注量 \tilde{u} を決定する。 \tilde{u} は以下のような分布に従う確率変数である。

$$\tilde{u} \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (6)$$

最後に、マーケット・メーカーは完全競争にさらされているとする。彼はアナリスト予想

$z(t)$ については知り得ないものの、ネットの発注量と公的情報 $y(t)$ については観察することができる。彼はこれらに基づいて価格 p を設定する。

ゲームの流れは次のとおりである。時点 t において情報トレーダーは a の注文を、ノイズ・トレーダーは u の注文を出す。マーケット・メーカーは a と u のネットの発注量および公的情報 $y(t)$ を観察したうえで、それを吸収するように価格 p を設定する。以下では、ネットの発注量について q で表す。つまり、

$$q = a + u \quad (7)$$

とおく。なお、第2ステージのゲームにおいて、 $y(t)$, σ_d^2 , $\sigma_y^2(t)$, $\sigma_z^2(t)$, および σ_u^2 については、3人のプレイヤー間の共有知識であり、 $z(t)$ については情報トレーダーだけが知っているものとする。

2.3 タイムライン

本節の内容をまとめると、ゲームのタイムラインは以下のとおりとなる。

• 第1ステージ

— 時点 0 において、企業はアナリストとコミュニケーションをはかり、予測能力 F_0^* を与える。

— アナリストは期間 $(0, 1)$ 内の時点 t^* において公的情報 $y(t^*)$ を入手し、アナリスト予想 $z(t^*)$ を形成したうえで、情報トレーダーに提供する。

• 第2ステージ

— 時点 t^* において、情報トレーダー、ノイズ・トレーダー、マーケット・メーカーは以下の取引を行う。

* 情報トレーダーは公的情報 $y(t^*)$ とアナ

^{*11} v について、Goldstein and Yang (2017) は market efficiency という名称で、Vives (2008) は price precision という名称で定義している。

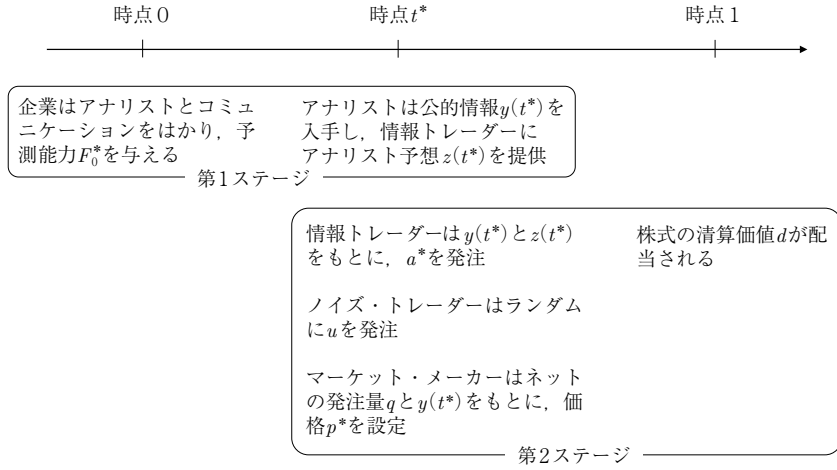


図2 タイムライン

リスト予想 $z(t^*)$ をもとに、 a^* の発注を行う。

*ノイズ・トレーダーはランダムに u を発注する。

マーケット・メーカーはネットの発注量 q と公的情報 $y(t^)$ をもとに、価格 p^* を設定する。

—時点1において、株式の清算価値 d が配当される。

以上を図示したものが、図2である。

3 均衡

本節では、前節の設定に基づいて均衡を求める。以下では、まず公的情報とアナリスト予想を所与としたうえで第2ステージの均衡を求め、その後に第1ステージに戻って均衡を導出する。

3.1 第2ステージの均衡

アナリスト予想の情報提供時点 t^* を所与とすると、第2ステージにおける均衡は、以下の $\{a^*, p^*\}$ である。なお、記号の簡略化のために、本研究では特に断りのない限り、 $y(t^*)$ を y 、 $z(t^*)$ を z 、 $\sigma_y^2(t^*)$ を σ_y^2 、 $\sigma_z^2(t^*)$ を σ_z^2 と書く。

1. a^* は以下の最大化問題の解である。

$$\max_a E[(d-p)a | y, z] \quad (8)$$

2. p^* は d に関するマーケット・メーカーの条件付期待値に等しい。

$$p^* = E[d | q, y] \quad (9)$$

以下では、線形戦略による均衡を求めるために、情報トレーダーの発注戦略、およびマーケット・メーカーの価格設定ルールについて、次のように想定する^{*12}。

*12 同様の定式化は、Gao et al. (2019) でも採用されている。

1. 情報トレーダーの発注戦略

$$a = \beta \{E(d|y, z) - E(d|y)\} \quad (10)$$

2. マーケット・メーカーの価格設定ルール

$$p = E(d|y) + \lambda q \quad (11)$$

これらを解くと、以下の結果が得られる。

(補題 1)

均衡における情報トレーダーの発注戦略、およびマーケット・メーカーの価格設定ルールは以下のとおりである。

$$a^* = \beta \{E(d|y, z) - E(d|y)\} \quad (12)$$

$$p^* = E(d|y) + \lambda q \quad (13)$$

ここに、それぞれのパラメータは以下のとおりである。

$$\beta = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \sigma_u \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_u^{-1} \quad (15)$$

なおここで、

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} E[\{E(d|y, z) - E(d|y)\}^2] \quad (16)$$

と定義している。

(証明) Appendix を参照。

補題 1 の結果からは様々なことを読み取ることができるが、ここでは 2 つの特徴だけを挙げておこう。第 1 に、 $\beta > 0$ であることから、情報トレーダーは公的情報とアナリスト予想に基づく d の期待値が、公的情報のみに基づく d の期待値を上回っている場合、買い注文を出すことがわかる。つまり、公的情報を所与として、アナリスト予想がグッド・ニュース（バッド・ニュース）である場合に、買い注文（売り注文）を出すのである。第 2 に、 $\lambda > 0$ であることから、マーケット・メーカーは公的情報に基づく

期待値が高いほど、また合計発注量 q が多いほど、価格 p を高く設定する。なお、(16) 式で定義した Σ_1 については、

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= E[\{E(d|y, z) - E(d|y)\}^2] \\ &= \frac{\sigma_d^4 \sigma_y^4}{(\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2)(\sigma_d^2 + \sigma_y^2)} \quad (17) \\ &= \frac{\rho_z(t)}{(\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t))(\rho_d + \rho_y(t))} \end{aligned}$$

と表すことができる。さて、補題 1 を利用して情報トレーダーの期待利益 $E\pi$ を求めると、次の補題 2 のようになる。

(補題 2)

情報トレーダーの期待利得は、 $E\pi = \lambda \sigma_u^2$ と表すことができる。

(証明) Appendix を参照。

一見して明らかのように、 $E\pi > 0$ である。期待利益が正となる理由は、情報トレーダーが情報劣位にあるノイズ・トレーダーとの取引から利益を得るためである。ここで、上記の $E\pi$ を(15)式と(17)式を用いて表すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} E\pi &= \lambda \sigma_u^2 \\ &= \frac{1}{2} \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_u \\ &= \frac{\sigma_u}{2} \sqrt{\frac{\rho_z(t)}{(\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t))(\rho_d + \rho_y(t))}} \quad (18) \\ &= \frac{\sigma_u}{2} \sqrt{\frac{1}{\rho_d + \rho_y(t)} - \frac{1}{\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t)}} \end{aligned}$$

上の展開の途中で部分分数分解を用いている。仮にアナリスト予想を入手しないとした場合の情報トレーダーの期待効用をゼロに基準化すれば、情報トレーダーの利益は(18)式のとおり表されることになる。なお、アナリストは情報トレーダーの利益を全て吸い上げることができる

ので、 $E\pi$ は、アナリスト予想の販売収入、あるいはアナリストの期待利得であると言えることができる。

3.2 第1ステージの均衡

次に、第1ステージに戻って均衡を導出する。アナリストの目的は、予想の販売から得られる収入を最大化することである^{*13}。そのために、アナリストは(18)式が最大化されるタイミングを決定しなければならない。収入を最大化するタイミングを求めるためには、(18)式の平方根の中身を最大化する t^* を求めればよい。平方根の中身を Z とおこう。つまり、

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho_d + \rho_y(t)} - \frac{1}{\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t)} \quad (19)$$

である。

アナリストが予想提供時点を決定する際に直面するトレードオフは以下のとおりである。すなわち、早い時点で予想を提供しようとする場合、アナリスト予想の精度は低くならざるを得ず、その分だけ情報トレーダーにとっての価値は低くなる。一方、早い時点では公的情報の精度も低いいため、情報トレーダーはその分だけアナリスト予想を高く評価する。つまり、アナリストは適時性と正確性のトレードオフに直面することになるのである。以下の補題3は、アナリストにとって最適なタイミングについて述べたものである。

(補題3)

F_0 を所与とすると、アナリストにとって最適な予想提供タイミング t^* は以下のとおりである。

$$t^* = \frac{\rho_d(\sqrt{1+\alpha}-1)-F_0}{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}} \quad (20)$$

(証明) Appendix を参照。

上式から、 F_0 が増加するほど、タイミング t^* は早くなることがわかる。 F_0 は企業から私的に入手した予測能力であるため、アナリストには自身の情報優位性が高いほど早期に予想提供を行う動機があることを意味している。なお、補題3の証明で述べたように、最適なタイミングが存在するためには、 $0 < t^* < 1$ でなければならない。もし、 $t^* \leq 0$ のとき、アナリストは限りなく時点0に近い時点で予想提供しようとするので、最適解は存在しない。また、 $t^* \geq 1$ のとき、アナリストは限りなく時点1に近い時点で予想提供しようとするので、やはり最適解は存在しない。本研究では、 $0 < t^* < 1$ が満たされているとする。補題3の結果を所与としたうえで、企業の目的関数を表したのが、次の補題4である。

(補題4)

企業の期待利得 $E\psi$ は以下のように表される。

$$E\psi = \frac{2(\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t))(\rho_d + \rho_y(t))}{2\rho_d + 2\rho_y(t) + \rho_z(t)} - c \cdot t^2 \quad (21)$$

(証明) Appendix を参照。

(21)式について、仮定の $\rho_y(t) = t$ 、(4)式の $\rho_z(t)$ および(20)式の t^* を代入して整理すると、以下を得る。

$$E\psi = \frac{2(\alpha\rho_d - F_0)}{\alpha} - c \left\{ \frac{\rho_d(\sqrt{1+\alpha}-1)-F_0}{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}} \right\}^2 \quad (22)$$

(22)式のとおり、株価の情報効率性 v は右辺第1項の $2(\alpha\rho_d - F_0)/\alpha$ として書き換えることができるため、 F_0 の減少関数であることがわかる。このことは、以下のように解釈することができる。つまり、企業が F_0 を高めるほど、アナリスト予想の精度は高まり、その結果とし

*13 アナリスト予想の販売収入は、情報トレーダーの利益と等しい。またアナリスト予想の価値であるとも言える。

て v は高まるという直接的な効果が働く。その一方で、 F_0 が高まるほど、アナリスト予想の提供タイミングが早くなり、その結果として v は低下するという間接的な効果が働く。そして、間接効果が直接効果を上回るため、 v は F_0 の増加に伴って減少するのである。一方、企業にとっての費用は右辺第2項によって表されている。この費用は F_0 の2次関数であるが、定義域が $0 \leq F_0 < \rho_d(\sqrt{1+\alpha}-1)$ に限定されているため、 F_0 の減少関数となる。つまり、コミュニケーションの水準 F_0 が高くなるほど、タイミングは早くなり、企業にとってのコストは減少することを意味している。補題4の結果から、以下の命題を得る。

(命題1)

企業にとって最適なコミュニケーションの水準 F_0^* と、アナリストにとって最適なタイミング t^* は、以下のとおりである。

$$F_0^* = (\sqrt{1+\alpha}-1) \left\{ \rho_d - \frac{(1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha c} \right\} \quad (23)$$

$$t^* = \frac{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}}{\alpha c} \quad (24)$$

ここに、パラメータは $c \cdot \rho_d \geq (1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)/\alpha$ かつ $c > \sqrt{1+\alpha}/(1+\sqrt{1+\alpha})$ を満たすとする。

(証明) Appendix を参照。

このように、第1ステージの均衡を閉じた形で表すことができる。なお、本研究の関心は F_0^* や t^* の絶対的な水準よりも、むしろ各パラメータの変化に対するそれらの挙動にある。そこで次節では、比較静学の結果を示すことにする。

4 比較静学

次の命題2では、最適なコミュニケーションの水準 F_0^* や最適なタイミング t^* という変数の性質を明らかにする。

(命題2)

1. F_0^* と t^* に関して、以下が成り立つ。

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial t^*}{\partial c} < 0, \quad \frac{\partial t^*}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial F_0^*}{\partial \rho_d} > 0$$

2. $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号は、閾値 $\hat{\alpha}$ を境に反転する。

具体的には、 $\alpha < \hat{\alpha}$ のときは $\partial F_0^*/\partial \alpha > 0$ であるが、 $\alpha \geq \hat{\alpha}$ のときは $\partial F_0^*/\partial \alpha \leq 0$ となる。なお $\hat{\alpha}$ は以下の方程式の最大解である。

$$2(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} - (c\rho_d - 2)(1+\alpha) - (2c\rho_d + 2)(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} - c\rho_d = 0 \quad (25)$$

3. t^* の水準は、 ρ_d の影響を受けない。

(証明) Appendix を参照。

命題2の経済的な解釈は以下のとおりである。第1に、時間待ちのコストを表す c が増加するほど、企業にとっての遺失利益は大きくなる。そのため、アナリストが迅速に予想を提供して株価が形成されるよう、企業はコミュニケーションの質を上げて、アナリストの情報優位性を高める($\partial F_0^*/\partial c > 0$)。そのため、アナリスト予想の提供時点は早くなる($\partial t_0^*/\partial c < 0$)。

第2に、資産価値のボラティリティが小さいほど(つまり、 ρ_d が大きいほど)、アナリスト予想へのニーズは低下するので、予想の価値は低くなる。そのため、彼は正確性を高めることで予想の価値を引き上げようと、公的情報の精度が十分に高まるまで待って予想提供を行おうとする。それに対し企業は、予想提供のタイミングを早めるため、コミュニケーションの質を上げて、アナリストの情報優位性を高める($\partial F_0^*/\partial \rho_d > 0$)。予想提供時点を遅らせようとするアナリストの作用は、タイミングを早めようとする企業の作用によってちょうど打ち消さ

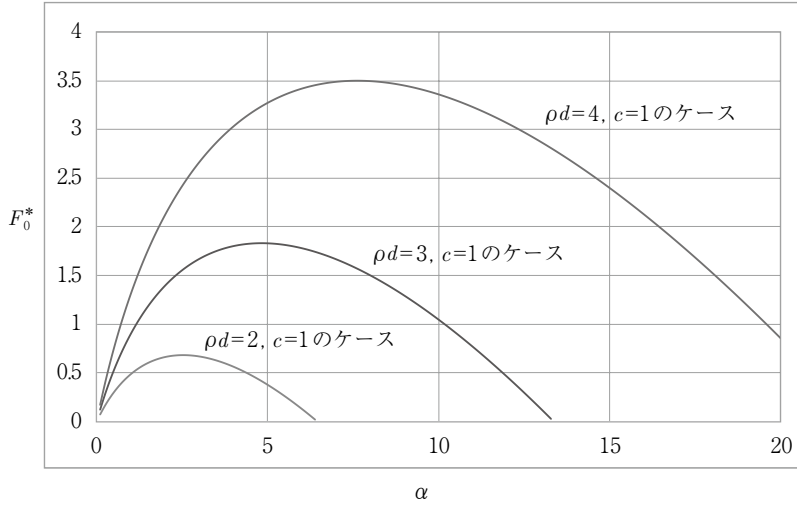


図3 α と F_0^* の軌跡

れるため、予想提供のタイミング t^* は変化しない。

第3に、アナリストの情報解釈能力 α が高くなるほど、彼は公的情報の精度が高くなるまで予想提供のタイミングを遅らせようとする ($\partial t^*/\partial \alpha > 0$)。この点は Guttman (2010) と一致する。他方、 $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の正負は一概に言えない。 $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号が定まらない理由は、次のように微妙なものである。本研究では、企業にとっての収益は株価の情報効率性 v であり、この v は先述したように F_0 の増加に伴って直線的に減少してゆく。それに対して、企業にとっての費用は、アナリスト予想の提供（そして株価形成）が遅れることによる逸失利益である。この費用は F_0 に関して下に凸な2次関数である。したがって、企業にとって最適なコミュニケーション水準は、限界収益と限界費用が一致するような F_0^* となる。この F_0^* の水準は α の増加に伴って変化する。命題2の証明において述べたように、 $c = 1$ および $\rho_d = 2$ の場合、閾値 $\hat{\alpha}$ は2.532となる。したがって、 $\alpha < 2.532$ のとき、 α の増加に伴って F_0^* は増加してゆく。一方、 $\alpha \geq 2.532$ のとき、 α の増加に伴

て F_0^* は減少してゆくのである。このように、閾値 $\hat{\alpha}$ を境に $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号は反転する。図3には α と F_0^* の軌跡を表示した。パラメータは $c = 1$ に固定したうえで、 $\rho_d = 2$ 、 $\rho_d = 3$ 、および $\rho_d = 4$ の3つのケースを記載している。いずれのケースでも当初は α の増加に伴って F_0^* は増加するが、閾値を境に F_0^* は減少に転じることがわかる。つまり、アナリストの公的情報を解釈する能力 α と、企業とのコミュニケーションを通して獲得される能力 F_0 は必ずしも同調しない。この点は我々の直観に反しており、特筆すべきもののように思われる。本節の最後に、アナリスト予想の価値（これはアナリストの期待利得に等しい）と、企業の期待利得の変化を明らかにする。

(命題3)

アナリスト予想の価値 $E\pi$ と企業の期待利得 $E\psi$ に関して、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E\pi}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial E\pi}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial E\pi}{\partial \rho_d} < 0, \\ \frac{\partial E\psi}{\partial c} < 0, \quad \frac{\partial E\psi}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial E\psi}{\partial \rho_d} > 0 \end{aligned}$$

(証明) Appendix を参照。

命題3は以下のように解釈できる。まず、命題2で述べたように、時間待ちのコスト c が増加するほど、企業はコミュニケーションの水準 F_0 を上げることになり、その結果、アナリスト予想の価値は高まる。したがって、 $\partial E\pi/\partial c > 0$ となる。一方、 $\partial E\psi/\partial c < 0$ となる理由は以下のとおりである。 c の増加が $E\psi$ に対してもたらす効果には、直接効果および F_0^* の変化を通じた間接効果がある。このうち間接効果はゼロであり、 c の増加は時間待ちのコストの増加を通じて $E\psi$ を引き下げる。以上のように、企業にとっての時間待ちのコストが増加するほど、アナリストは有利になる一方で、企業は不利になる。

また、 $\partial E\pi/\partial \alpha > 0$ となる理由は、以下のよう解される。情報の解釈能力 α の増加には、アナリスト予想の価値を高めるという直接効果と、コミュニケーション水準 F_0^* の変化を通じて $E\pi$ に及ぼす間接効果がある。このうち間接効果の方向については、命題2で述べたように、 α の増加が F_0^* を上昇させることも、低下させることもあるが、直接効果が強く働くため、 $\partial E\pi/\partial \alpha > 0$ となる。このように、アナリストが情報解釈に熟達するほど、企業とのコミュニケーションの水準は低下する可能性はあるものの、アナリスト自身の利得は高まるのである。つまり、情報を解釈する力は、究極的にアナリスト自身を助けると言える。一方、 $\partial E\psi/\partial \alpha > 0$ となる理由は以下のとおりである。 α の増加が $E\psi$ に対してもたらす効果には、直接効果および F_0^* の変化を通じた間接効果があるが、このうち間接効果はゼロとなる。その結果、 α の増加は株価の情報効率性 v の向上を通じて $E\psi$ を引き上げる。このように、カバーするアナリストの情報解釈力が高いほど、企業の側は恩恵を受けることになる。

最後に、 $\partial E\pi/\partial \rho_d < 0$ となる理由は以下のとおりである。 ρ_d の増加、すなわちボラティリ

ティの低下には、アナリスト予想へのニーズを低下させ $E\pi$ を引き下げるという直接効果がある。一方で、 ρ_d が増加するほど F_0 が上昇してアナリスト予想の価値が高まることから、 $E\pi$ は増加するという間接効果がある。そして、直接効果が間接効果を上回るため、 $\partial E\pi/\partial \rho_d < 0$ となる。このように、資産価値のボラティリティが小さくなるほど、アナリストの期待利得は低下する。一方、 $\partial E\psi/\partial \rho_d > 0$ となる理由は以下のとおりである。 ρ_d の増加が $E\psi$ に対してもたらす効果には、直接効果および F_0^* の変化を通じた間接効果があるが、このうち間接効果はゼロとなる。その結果、 ρ_d の増加は株価の情報効率性 v の向上を通じて $E\psi$ を引き上げる。このように、資産価値のボラティリティが小さくなるほど、企業の期待利得は高まることになる。

おわりに

本研究の目的は、企業からアナリストへ私的に提供される情報の質と、アナリスト予想の提供タイミングがどのように決定されるかを明らかにすることであった。先行研究では企業から提供される情報を所与としたうえで、アナリストの予想行動が分析されている。しかしながら、アナリストによる予想行動と、企業側から提供される情報は、相互に依存しているのが適切である。そのため、本研究では、企業とアナリストというプレイヤーをモデル化して分析を行った。その結果、企業によるコミュニケーションの最適水準とアナリスト予想の最適なタイミングを閉じた形で表すことができた。また、各種のパラメータが、コミュニケーションの水準、予想提供のタイミング、およびプレイヤーの厚生に及ぼす影響も明らかになった。

なお、本研究では、企業はアナリストに対して私的に情報を開示するだけで、株式市場参加者に対して公的に情報を開示することは考慮していない。しかしながら、現実には、企業は私

的開示とともに公的開示を併用している。このようなハイブリッドな開示を行う場合、それぞれの開示水準はどのような関係にあるのだろうか。そして、アナリスト予想のタイミングはいかに決まるのだろうか。これらの点については、稿を改めて論じたい。

参考文献

- [1] Altinkilic, O., Balashov, V. and R. Hansen. 2013. Are Analysts' Forecasts Informative to the General Public? *Management Science* 59(11): 2550-2565.
- [2] Altinkilic, O. and R. Hansen. 2009. On the Information Role of Stock Recommendation Revisions. *Journal of Accounting and Economics* 48(1): 17-36.
- [3] Bond, P., Edmans, A. and I. Goldstein. 2012. The Real Effects of Financial Markets. *Annual Review of Financial Economics* 4: 339-360.
- [4] Brown, L., Call, A., Clement, M. and N. Sharp. 2015. Inside the "Black Box" of Sell-Side Financial Analysts. *Journal of Accounting Research* 53(1): 1-47.
- [5] Brunnermeier, M. 2001. *Asset Pricing under Asymmetric Information: Bubbles, Crashes, Technical Analysis, and Herding*. N. Y.: Oxford University Press.
- [6] Chen, X., Q. Cheng, and K. Lo. 2010. On the Relationship between Analyst Reports and Corporate Disclosures: Exploring the Roles of Information Discovery and Interpretation. *Journal of Accounting and Economics* 49(3): 206-226.
- [7] Fishman, M. and K. Hagerty. 1989. Disclosure Decisions by Firms and the Competition for Price Efficiency. *The Journal of Finance* 44(3): 633-646.
- [8] Gao, P., X. Jiang, and G. Zhang. 2019. Firm Value and Market Liquidity around the Adoption of Common Accounting Standards. *Journal of Accounting and Economics* 68(1): 1-15.
- [9] Goldstein, I. and L. Yang. 2017. Information Disclosure in Financial Markets. *Annual Review of Financial Economics* 9: 101-125.
- [10] Guttman, I. 2010. The Timing of Analysts' Earnings Forecasts. *The Accounting Review* 85(2): 513-545.
- [11] Holmström, B. and J. Tirole. 1993. Market Liquidity and Performance Monitoring. *Journal of Political Economy* 101(4): 678-709.
- [12] Huang, A., Lehavy, R., Zang, A., and R. Zheng. 2018. Analyst Information Discovery and Interpretation Roles: A Topic Modeling Approach. *Management Science* 64(6): 2833-2855.
- [13] Ivkovic, Z. and N. Jegadeesh. 2004. The Timing and Value of Forecast and Recommendation Revisions. *Journal of Financial Economics* 73(3): 433-463.
- [14] Kim, Y. and M. Song. 2014. Management Earnings Forecasts and Value of Analyst Forecast Revisions. *Management Science* 61(7): 1663 - 1683.
- [15] Kyle, A. 1985. Continuous Auctions and Insider Trading. *Econometrica* 53(6): 1315-1335.
- [16] Langberg, N. and K. Sivaramakrishnan. 2008. Voluntary Disclosures and Information Production by Analysts. *Journal of Accounting and Economics* 46(1): 78-100.
- [17] Livnat, J. and Y. Zhang. 2012. Information Interpretation or Information Discovery: Which Role of Analysts do Investors Value More? *Review of Accounting Studies* 17(3): 612-641.
- [18] Ramnath, S., S. Rock and P. Shane. 2008. The Financial Analyst Forecasting Literature: A Taxonomy with Suggestions for Future Research. *International Journal of Forecasting* 24(1): 34-75.
- [19] Soltes, E. 2014. Private Interaction Between Firm Management and Sell-Side Analysts. *Journal of Accounting Research* 52(1): 245-272.
- [20] Vives, X. 2008. *Information and Learning in Markets: The Impact of Market Microstructure*. N. J.: Princeton University Press.
- [21] 岩田暁一. 1983. 『経済分析のための統計的方法 (第2版)』, 東洋経済新報社.
- [22] 野間幹晴. 2008. 「経営者予想とアナリスト予想—期待マネジメントとハーディング—」『企業会計』 60(5): 116-122.

Appendix

補題 1 の証明

情報トレーダーの発注戦略

(11)式の価格設定ルールを所与とした場合における、情報トレーダーの期待利益は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} E(\pi|y, z) &= E[(d-p)a|y, z] \\ &= E[\{d-E(d|y)-\lambda(a+u)\}a|y, z] \quad (26) \\ &= \{E(d|y, z) - E(d|y) - \lambda a\}a \end{aligned}$$

上式について a に関する 1 階の条件を適用すると、以下ようになる。

$$E(d|y, z) - E(d|y) - 2\lambda a = 0 \quad (27)$$

これを整理すると、

$$a = \frac{1}{\underbrace{2\lambda}_{=\beta}} \{E(d|y, z) - E(d|y)\} \quad (28)$$

を得る。したがって、

$$\beta = \frac{1}{2\lambda} \quad (29)$$

となる。なお、 a に関する 2 階の条件は $\lambda > 0$ であり、これが満たされていることは後にわかる。

マーケット・メーカーの価格設定ルール

情報トレーダーの発注戦略を所与として、マーケット・メーカーの価格設定ルールを導く。ここで(10)式より $q = a + u$ は、

$$q = \beta \{E(d|y, z) - E(d|y)\} + u \quad (30)$$

と書ける。マーケット・メーカーの立場からみると、ベクトル $[E(d|y, z), q]^T$ は、

$$\begin{bmatrix} E(d|y, z) \\ q \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} E(d|y) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \beta\Sigma_1 \\ \beta\Sigma_1 & \beta^2\Sigma_1 + \sigma_u^2 \end{bmatrix}\right) \quad (31)$$

の 2 変量正規分布に従う。なお、 Σ_1 については、(16)式のように定義している。ここで、射影定理を用いれば、次が成り立つ^{*14}。

$$p = E(d|y) + \underbrace{\frac{\beta\Sigma_1}{\beta^2\Sigma_1 + \sigma_u^2} q}_{=\lambda} \quad (32)$$

したがって、

$$\lambda = \frac{\beta\Sigma_1}{\beta^2\Sigma_1 + \sigma_u^2} \quad (33)$$

となる。

解の導出

(29)式と(33)式を連立させると、補題1の結果が得られる。(証明終わり)

補題 2 の証明

情報トレーダーの期待利得は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} E\pi &= E[E[(d-p)a|y, z]] \\ &= E[E[\{d-E(d|y)-\lambda(a+u)\}a|y, z]] \\ &= E[(E(d|y, z) - E(d|y) - \lambda\beta\{E(d|y, z) - E(d|y)\})\beta\{E(d|y, z) - E(d|y)\}] \\ &= E[\beta(1-\lambda\beta)\{E(d|y, z) - E(d|y)\}^2] \\ &= (\beta - \lambda\beta^2)\Sigma_1 \quad (34) \end{aligned}$$

ここで、 λ の式である(33)式を変形すれば、

$$\lambda\beta^2\Sigma_1 = \beta\Sigma_1 - \lambda\sigma_u^2 \quad (35)$$

とできる。これを(34)式に代入すれば、 $E\pi = \lambda\sigma_u^2$ を得る。(証明終わり)

*14 射影定理については、Brunnermeier (2001) 等を参照。

補題 3 の証明

(4)式のとおり $\rho_z(t) = F_0 + \alpha \cdot \rho_y(t)$ であることに注意して、(19)式の Z を $\rho_y(t)$ で偏微分すると、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(\rho_d + \rho_y(t))^2} + \frac{1 + \alpha}{(\rho_d + \rho_y(t) + F_0 + \alpha \rho_y(t))^2} \\ &= -\left(\frac{1}{\rho_d + \rho_y(t)} + \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\rho_d + \rho_y(t) + F_0 + \alpha \rho_y(t)} \right) \\ & \left(\frac{1}{\rho_d + \rho_y(t)} + \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\rho_d + \rho_y(t) + F_0 + \alpha \rho_y(t)} \right) \quad (36) \end{aligned}$$

2つの括弧のうち、1つ目のものは明らかに正であるから、1階の条件が成立するためには

$$\frac{1}{\rho_d + \rho_y(t)} - \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\rho_d + \rho_y(t) + F_0 + \alpha \rho_y(t)} = 0 \quad (37)$$

でなければならない。上式を $\rho_y(t)$ について解けば、

$$\rho_y(t) = \frac{\rho_d(\sqrt{1 + \alpha} - 1) - F_0}{1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha}} \quad (38)$$

を得る。この右辺を ρ_y^* とおく。すると(36)式は $\rho_y(t) < \rho_y^*$ となる領域では正、 $\rho_y(t) = \rho_y^*$ のとき 0、 $\rho_y(t) > \rho_y^*$ の領域では負となることがわかる。つまり、 Z は、 ρ_y^* で最大値をとる単峰型の関数である。

いま $0 < \rho_y^* < 1$ であるとしよう。この場合、 $t = \rho_y(t)$ という仮定より、 $t^* = \rho_y^*$ である。それに対し、 $\rho_y^* \leq 0$ であるとしよう。この場合、開区間 $(0, 1)$ において Z は単調減少であり、時点 0 に近いほど Z の値は大きくなるものの、最大値は存在しない。他方、 $\rho_y^* \geq 1$ であるとしよう。この場合、開区間 $(0, 1)$ において Z は単調増加であり、時点 1 に近いほど Z の値は大きくなるものの、最大値は存在しない。

(証明終わり)

補題 4 の証明

まず株価の情報効率性 v を求める。マーケット・メーカーの立場からみると、清算価値と価格のベクトル $[d, p]^T$ は、

$$\begin{bmatrix} d \\ p \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} E(d|y) \\ E(d|y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \lambda \beta \Sigma_1 \\ \lambda \beta \Sigma_1 & \lambda^2 (\beta^2 \Sigma_1 + \sigma_u^2) \end{bmatrix} \right) \quad (39)$$

の 2 変量正規分布に従う。なお、上の行列表記の中で、

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= E[(d - E(d|y))^2] \\ &= \frac{\sigma_d^2 \sigma_y^2}{\sigma_d^2 + \sigma_y^2} \quad (40) \end{aligned}$$

としている。また、 $\lambda \beta \Sigma_1$ は次のようにして求めている。

$$\begin{aligned} & E[\{(d - E(d|y))\{p - E(d|y)\}\}] \\ &= E[\{d - E(d|y)\}\{E(d|y) + \lambda q - E(d|y)\}] \\ &= \lambda E[\{d - E(d|y)\}(\beta\{E(d|y, z) - E(d|y)\} + u)] \\ &= \lambda \beta E[\{d - E(d|y)\}\{E(d|y, z) - E(d|y)\}] \\ &= \lambda \beta E \left[\left\{ d - \bar{d} - \frac{\sigma_d^2(y - \bar{d})}{\sigma_d^2 + \sigma_y^2} \right\} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \bar{d} + \frac{\sigma_d^2 \sigma_z^2(y - \bar{d}) + \sigma_d^2 \sigma_y^2(z - \bar{d})}{\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2} - \bar{d} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sigma_d^2(y - \bar{d})}{\sigma_d^2 + \sigma_y^2} \right\} \right] \\ &= \lambda \beta \frac{\sigma_d^4 \sigma_y^4}{(\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2)(\sigma_d^2 + \sigma_y^2)} \\ &= \lambda \beta \Sigma_1 \quad (41) \end{aligned}$$

よって、射影定理より $\text{Var}(d|p)$ は以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(d|p) &= \Sigma_0 - \frac{\lambda^2 \beta^2 \Sigma_1^2}{\lambda^2 \beta^2 \Sigma_1 + \lambda^2 \sigma_u^2} \\ &= \Sigma_0 - \frac{\beta^2 \Sigma_1^2}{\beta^2 \Sigma_1 + \sigma_u^2} \quad (42) \end{aligned}$$

ここで、 Σ_0 に関する(40)式と Σ_1 に関する(17)式より、

$$\Sigma_0 = \frac{\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2}{\sigma_d^2 \sigma_y^2} \Sigma_1 \quad (43)$$

と書ける。また、 β は(14)式のように表されるから、(42)式にこれらを用いれば、

$$\text{Var}(d|p) = \left(\frac{\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2}{\sigma_d^2 \sigma_y^2} - \frac{1}{2} \right) \Sigma_1 \quad (44)$$

となる。したがって、株価の情報効率性 v は

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\text{Var}(d|p)} = \frac{2(\sigma_d^2 \sigma_y^2 + \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \sigma_d^2 \sigma_z^2)(\sigma_d^2 + \sigma_y^2)}{\sigma_d^2 \sigma_y^2 (\sigma_d^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_y^2 \sigma_z^2 + 2\sigma_d^2 \sigma_z^2)} \\ &= \frac{2(\rho_d + \rho_y(t) + \rho_z(t))(\rho_d + \rho_y(t))}{2\rho_d + 2\rho_y(t) + \rho_z(t)} \end{aligned} \quad (45)$$

と書ける。それゆえ、企業の期待利得は(21)式のように表すことができる。(証明終わり)

命題 1 の証明

補題 4 で得られた(21)式に関する 1 階の条件は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\alpha} - 2c \left(\frac{\rho_d(\sqrt{1+\alpha}-1) - F_0}{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}} \right) \cdot \\ & \left(-\frac{1}{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

これを F_0 について解けば、以下を得る。

$$F_0 = (\sqrt{1+\alpha}-1) \left\{ \rho_d - \frac{(1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha c} \right\} \quad (47)$$

なお、(21)式を 2 階偏微分した結果は、以下のとおり負である。

$$-2c(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha})^{-2} < 0 \quad (48)$$

したがって、1 階の条件より求めた解は最大解であることがわかる。あとは、求めた F_0 を(20)式に代入すれば、

$$t^* = \frac{1+\alpha-\sqrt{1+\alpha}}{\alpha c} \quad (49)$$

が得られる。なお、 $F_0^* \geq 0$ の条件より、

$$(\sqrt{1+\alpha}-1) \left\{ \rho_d - \frac{(1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha c} \right\} \geq 0 \quad (50)$$

であるが、 $\sqrt{1+\alpha}-1 > 0$ は明らかなので、

$$c \rho_d \geq \frac{(1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha} \quad (51)$$

でなければならない。この条件は命題 2 の証明で用いる。また、 $t^* < 1$ の条件より、

$$c > \frac{\sqrt{1+\alpha}}{1+\sqrt{1+\alpha}} \quad (52)$$

が成立していなければならない。(証明終わり)

命題 2 の証明

$\partial F_0^*/\partial \rho_d$ 、 $\partial F_0^*/\partial c$ および $\partial t^*/\partial c$ の符号は容易にわかる。以下では $\partial t^*/\partial \alpha$ および $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号についてのみ示す。まず、

$$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} = \frac{2+\alpha-2\sqrt{1+\alpha}}{2\alpha^2 c \sqrt{1+\alpha}} \quad (53)$$

となるが、この分母は明らかに正だから、分子の正負を調べればよい。ここで、 $\sqrt{1+\alpha} = s$ と置けば、当初の仮定より $\alpha > 0$ だから、 $s > 1$ である。 s を用いると、分子の $2+\alpha-2\sqrt{1+\alpha}$ は $(s-1)^2$ と表すことができる。これは明らかに正だから、 $2+\alpha-2\sqrt{1+\alpha} > 0$ である（この事実、このあとの命題 3 の証明で複数回用いる）。ゆえに $\partial t^*/\partial \alpha > 0$ である。次に、

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial \alpha} = \frac{\alpha^2 c \rho_d - \sqrt{1+\alpha}(2\alpha^2 - 4) + 2\alpha^2 - 2\alpha - 4}{2\alpha^2 c \sqrt{1+\alpha}} \quad (54)$$

となるが、この分母は明らかに正であるから、分子の符号を調べればよい。 $\sqrt{1+\alpha} = s$ と置いているので、分子は

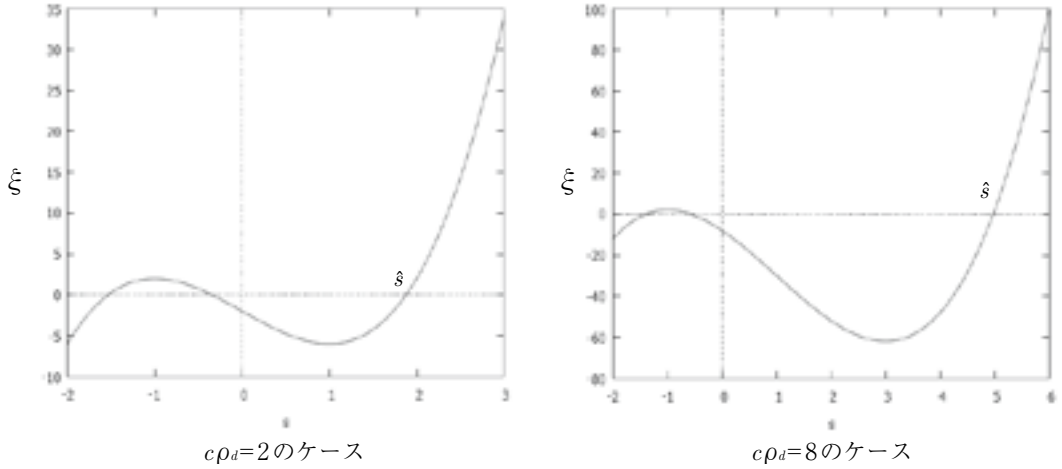


図4 $\xi(s)$ の形状

$$\begin{aligned}
 & \alpha^2 c \rho_d - \sqrt{1+\alpha}(2\alpha^2 - 4) + 2\alpha^2 - 2\alpha - 4 \\
 &= (s^2 - 1)^2 c \rho_d - s \{2(s^2 - 1)^2 - 4\} + 2(s^2 - 1)^2 \\
 & \quad - 2(s^2 - 1) - 4 \\
 &= -(s-1)^2 \\
 & \quad \underbrace{\{2s^3 - (c\rho_d - 2)s^2 - (2c\rho_d + 2)s - c\rho_d\}}_{=\xi(s)}
 \end{aligned} \tag{55}$$

と表すことができる。したがって、 $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号は、上式の括弧内の正負に依存していると言える。括弧内の3次関数を $\xi(s)$ と置いたうえでその形状を調べる。 s で微分すると、

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = 2(s+1)(3s - c\rho_d - 1) \tag{56}$$

となるので、 $\xi(s)$ は $s = -1$ のときに極大値2を、 $s = (c\rho_d + 1)/3$ のときに極小値 $-\{(c\rho_d)^3 + 12(c\rho_d)^2 + 48(c\rho_d) + 10\}/27$ という負値をとることがわかる。また、 $\xi(0) = -c\rho_d < 0$ であり、 $\xi(1) = 2 - 4c\rho_d$ であることもわかる。ところで、命題1の証明で述べた(51)式を s を用いて表すと、

$$\begin{aligned}
 c\rho_d &\geq \frac{(1+\alpha)(\sqrt{1+\alpha}-1)}{\alpha} \\
 &= \frac{s^2(s-1)}{s^2-1} = \frac{s}{1+\frac{1}{s}}
 \end{aligned} \tag{57}$$

となる。右辺は s に関して単調増加な関数であり、また $s > 1$ であったから、 $c\rho_d > 1/2$ でなければならない。したがって、結局 $\xi(1) = 2 - 4c\rho_d < 0$ となる。図4では、パラメータの値を $c\rho_d = 2$ とした場合と、 $c\rho_d = 8$ とした場合の $\xi(s)$ の形状を示している。図4より、 $1 < s < \hat{s}$ の領域では $\xi(s) < 0$ つまり $\partial F_0^*/\partial \alpha > 0$ であり、 $s \geq \hat{s}$ の領域では $\xi(s) \geq 0$ つまり $\partial F_0^*/\partial \alpha \leq 0$ となることがわかる。そして、このような閾値 \hat{s} は3次関数

$$2s^3 - (c\rho_d - 2)s^2 - (2c\rho_d + 2)s - c\rho_d = 0 \tag{58}$$

の最大解として求めることができる。なお、(58)式を s ではなく α を用いて表したのが、(25)式である。(58)式の解は非常に煩雑なので明示することは避けるが、 \hat{s} はパラメータ c と ρ_d の値に依存していることは明らかである。具体的には、 $c\rho_d = 2$ の場合は $\hat{s} \approx 1.879$ （つまり、 $\hat{\alpha} \approx 2.532$ ）となるのに対し、 $c\rho_d = 8$ の場合は $\hat{s} \approx 4.972$ （つまり、 $\hat{\alpha} \approx 23.720$ ）となる。このよ

うに, $\partial F_0^*/\partial \alpha$ の符号は閾値 \hat{s} (つまり $\hat{\alpha}$) を境に反転する。すなわち, s (つまり α) が閾値に達するまでは $\partial F_0^*/\partial \alpha > 0$ であるが, 閾値以上になると $\partial F_0^*/\partial \alpha \leq 0$ となる。(証明終わり)

命題 3 の証明

アナリストの期待利得 $E\pi$ は, (19) 式で表される Z の単調増加関数であった。したがって, アナリストの期待利得の挙動を調べるためには, Z の挙動を調べれば足りる。仮定より $\rho_y(t) = t$ であり, また $\rho_z(t)$ は (4) 式のように表された。そして命題 1 より t^* は α および c の関数として, F_0^* は α , ρ_d および c の関数として表されたから, Z の最大値関数を V_Z と置くと,

$$\begin{aligned} V_Z &= Z(t^*(\alpha, c), F_0^*(\alpha, \rho_d, c), \alpha, \rho_d) \\ &= Z(t^*(s, c), F_0^*(s, \rho_d, c), s, \rho_d) \end{aligned} \quad (59)$$

のように書ける。なお表記の簡単化のため, $\sqrt{1+\alpha} = s$ としている。ここで,

$$V_Z = V_Z(t^*(s), F_0^*(s), s) \quad (60)$$

と書けることから, 包絡線定理を適用すると, 以下が得られる。

$$\frac{\partial V_Z}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial V_Z}{\partial t^*}}_{=0} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial s} + \frac{\partial V_Z}{\partial F_0^*} \cdot \frac{\partial F_0^*}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial s} \quad (61)$$

なお, 以下が成り立つ。

$$\frac{\partial V_Z}{\partial F_0^*} = \frac{1}{(\rho_d + s^2 t^* + F_0^*)^2} > 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial s} = \frac{-\xi(s)}{c(s+1)^2} \quad (63)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{2st^*}{(\rho_d + s^2 t^* + F_0^*)^2} > 0 \quad (64)$$

これらのうち, $\partial F_0^*/\partial s$ 中の $\xi(s)$ については, s の増加に従って符号が反転するため, 正負は一概に言えない。しかしながら, 計算の結果,

$$\frac{\partial V_Z}{\partial s} = \frac{c(c\rho_d s^2 + 2c\rho_d s + c\rho_d + 2s)}{s^2(c\rho_d s + c\rho_d + s)^2} > 0 \quad (65)$$

となることがわかる。

次に,

$$V_Z = V_Z(t^*(c), F_0^*(c)) \quad (66)$$

と書けることから,

$$\frac{\partial V_Z}{\partial c} = \underbrace{\frac{\partial V_Z}{\partial t^*}}_{=0} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial c} + \underbrace{\frac{\partial V_Z}{\partial F_0^*}}_{>0} \cdot \frac{\partial F_0^*}{\partial c} \quad (67)$$

となるが,

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial c} = \frac{(s-1)s^2}{c^2(s+1)} > 0 \quad (68)$$

であることから, 結局 $\partial V_Z/\partial c > 0$ である。また,

$$V_Z = V_Z(F_0^*(\rho_d), \rho_d) \quad (69)$$

と書くことができる。これより,

$$\frac{\partial V_Z}{\partial \rho_d} = \frac{\partial V_Z}{\partial F_0^*} \cdot \underbrace{\frac{\partial F_0^*}{\partial \rho_d}}_{>0} + \frac{\partial Z}{\partial \rho_d} \quad (70)$$

であるが,

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial \rho_d} = s - 1 > 0 \quad (71)$$

および

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho_d} = \frac{1}{(\rho_d + s^2 t^* + F_0^*)^2} - \frac{1}{(\rho_d + t^*)^2} < 0 \quad (72)$$

となる。これらに基づいて計算すれば,

$$\frac{\partial V_Z}{\partial \rho_d} = -\frac{c^2(s-1)(s+1)^2}{s(c\rho_d s + s + c\rho_d)^2} < 0 \quad (73)$$

を得る。

次に $E\psi$ に対する影響を調べる。 $E\psi$ は補題 4 のように表現されるが, 仮定, (4) 式および命題 1 を適用することにより,

$$E\psi = E\psi(t^*(s, c), F_0^*(s, \rho_d, c), s, \rho_d, c) \quad (74)$$

のように書ける。 $E\psi$ の最大値関数を V_ψ と置くと,

$$V_\psi = V_\psi(F_0^*(t^*(s)), s) \quad (75)$$

と表すことができる。ここで包絡線定理を適用すると、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\psi}{\partial s} &= \frac{\partial V_\psi}{\underbrace{\frac{\partial F_0^*}{\partial s}}_{=0}} \cdot \frac{\partial F_0^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial s} + \frac{\partial E\psi}{\partial s} \\ &= \frac{2(c\rho_d s + s + c\rho_d)}{c(s+1)^3} > 0 \end{aligned} \quad (76)$$

$$V_\psi = V_\psi(F_0^*(t^*(c)), c) \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\psi}{\partial c} &= \frac{\partial V_\psi}{\underbrace{\frac{\partial F_0^*}{\partial c}}_{=0}} \cdot \frac{\partial F_0^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial c} + \frac{\partial E\psi}{\partial c} \\ &= -\frac{s^2}{c^2(s+1)^2} < 0 \end{aligned} \quad (78)$$

$$V_\psi = V_\psi(F_0^*(\rho_d), \rho_d) \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\psi}{\partial \rho_d} &= \frac{\partial V_\psi}{\underbrace{\frac{\partial F_0^*}{\partial \rho_d}}_{=0}} \cdot \frac{\partial F_0^*}{\partial \rho_d} + \frac{\partial E\psi}{\partial \rho_d} \\ &= \frac{2s}{s+1} > 0 \end{aligned} \quad (80)$$

(証明終わり)