査読付論文

α-サブモジュラー性を満たす利得関数の一考察*

宇野木　広　樹**

要　旨

経済学においては各ノードの行動やインセンティブに焦点を当て、各ノードがリンクを形成するか否かを戦略的に選択し、その結果ネットワークが形成される「ネットワーク形成ゲーム」と呼ばれる研究分野が存在する。このネットワーク形成ゲームの研究では複数のネットワークの均衡概念が存在している。

本稿ではネットワーク形成ゲームにおける代表的なネットワーク均衡概念である「ペア安定性」と「ペアナッシュ均衡」を比較し、それぞれの均衡概念としての長所と短所を明らかにする。また、Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)においてペア安定性とペアナッシュ均衡とが一致する為に重要なα-サブモジュラー性を紹介する。最後に、サブモジュラー性を満たすための十分条件を提示し、坂上、加藤、宇野木(2007)にて用いられた利得関数がこの十分条件を満たす事を示す。

はじめに

現代社会において、情報の持つ価値は非常に高く、様々な情報がネットワークを通じて瞬時に伝達されている。また、現代社会においてどのようなネットワーク構造が情報を効率的に伝達することができるのかということは非常に大きな分析テーマである。ネットワークに関する分析は物理・数学・工学・社会学・生物学など、多岐の分野で盛んに行われてきている。経済学においては、各ノードがリンクを形成するか、もしくは形成しないかを戦略的に選択し、その結果ネットワークが形成される「ネットワーク形成ゲーム」と呼ばれる研究分野が存在する。ネットワーク構造が重要な役割を果たす経済的状況は多岐にわたる事が分かってきており、例えば、各個人が持つ情報を全員で共有するような情報共有ネットワークを構築する状況は一つの例として挙げられるであろう。さらに、ネットワーク形成ゲームは幅広い分野で応用されてきており、求職情報を共有できる労働市場の分析[1]、売り手と買い手のネットワークの分析[2]、

* 本稿はJSPS科研費補助金（17K03744）の助成を受けた研究の一環となるものである。本稿の完成までに2名の匿名のレフェリーから多大なるアドバイスを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。また、本稿における誤りは全て筆者の責任である。

** 中九州短期大学 経営福祉学科 准教授　unoki@nkjc.ac.jp

[1] 例えばCalvo-Armengol and Jackson(2004)が挙げられる。

[2] 例えば Wang and Watts(2005), Kranton and Minehart(2001)等が挙げられる。

自由貿易協定の世界的形成の分析[3]等も行われている。

ネットワーク形成ゲームにおける代表的な研究である Jackson and Wolinsky(1996)と Bala and Goyal(2000)では、モデルにおける各ノードは同質であり、各ノードから得る便益と任意のリンクを形成するための費用は同一であった。この単純化によって明快な結論を得ていたことは確かであったが、現実世界において個人、企業、国家、団体等は決して同質ではない。よって、各ノードが同質でないネットワーク形成ゲームの分析が行われていった。例えば、Johonson and Gilles(2000)は Jackson and Wolinsky(1996)の連結モデルを拡張し、各ノード間でリンク形成費用が異なるモデルを提示した。各ノードは 0 から 1 までの実数直線上に分布しており、各ノード間でのリンク形成費用は各ノード間の数直線上の距離に依存する。このような拡張によって、ペア安定的ネットワーク、効率的ネットワークとして様々な形状のネットワークが導出されることを示した。また、McBride(2008)は Bala and Goyal(2000)を拡張し、リンク形成便益が各ノードで異なるモデルを提示している。さらに、各ノードのもつリンク形成便益に対する情報が不完全であるケースについても分析を行っている。そして、Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006)は Bala and Goyal(2000)の双方向モデルをリンク形成費用とリンク形成便益がノード間で異なるモデルへと拡張した。この研究によって、ノード間で伝達される便益の非対称性はネットワークの連結性にとって重要であり、各ノード間でのリンク形成費用の非対称性はネットワーク連結性のみならず個々のコンポーネントの構造に対して決定的な影響を及ぼすことを示している。しかし、Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006)では利得関数内にネットワーク便益の減耗が考慮されていない。本論文で用いている利得関数はリンク形成費用とリンク形成便益がノード間において非対称でありつつネットワーク便益の減耗が存在しており、Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006)で用いられた利得関数よりも非対称的なモデルを表現することの出来るものになっている。

ネットワーク形成ゲームでは、どのようなネットワークが実現されるのか、そしてどのようなネットワークが安定的であるのかといったネットワークの均衡分析が大きな研究テーマとなっており、これまでにネットワーク均衡の様々な概念が提示されてきた。本稿では代表的なネットワーク均衡概念であるペア安定性とペアナッシュ均衡を比較し、それぞれの均衡概念としての長所と短所を明らかにする。また、Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)においてペア安定性とペアナッシュ均衡とが一致する為に重要な α-サブモジュラー性を紹介し、利得関数がサブモジュラー性を満たすための十分条件を提示する。最後に、坂上、加藤、宇野木(2007)にて用いた利得関数がこの十分条件を満たす事を示す。

[3] 例えば Furusawa and Konishi(2005, 2007), Goyal and Joshi(2006)等が挙げられる。

1. 連結モデル

Jackson and Wolinsky(1996)はグラフ理論とゲーム理論を応用し、各ノードがどのように結びつくか（リンクを形成する）によってネットワークが形成され、ネットワークの構造によって各ノードがネットワークから得る便益が変化するモデルを提示しており、同質なノードが主体的に意思決定を行う静学的ネットワーク形成ゲームにおけるネットワークの効率性とペア安定性(pairwise stability)を分析している。この研究の中で、リンク形成費用と便益の伝達率との関係によって、効率的なネットワークと安定的なネットワークがそれぞれどのような形状になるのかを分析している。また、ネットワークの効率性と安定性が必ずしも両立しないことを明らかにしている。Jackson and Wolinsky (1996)の連結モデルは協調的なネットワーク形成を対象としており、企業間の業務提携や国家間の協定締結問題等を分析するのに適している。

1.1.リンクとネットワーク

ネットワークにおいて$n \geq 3$個のノードが存在し、ノード集合を$N = \{1, \cdots, n\}$で表そう。2 つのノード$i, j \in N, i \neq j$との間に形成されるリンクをijと記し、ネットワークgはノード間で形成されたリンクの集合であるとする。すなわち、ネットワークgにおいてリンクijが存在するならば$ij \in g$である。本稿で考えるリンクは無向リンクであり、ノードiとノードjとの間にリンクが形成されたならば、両ノード間で便益の伝達が相互に行われるものとする[4]。ネットワークにおける任意のリンクijはノードiとノードjとの間にて合意が成立したときにのみ形成されるものとする。一方、リンクを削除する場合には双方の合意は必要ではなく、どちらか一方のノードが削除する意思を相手に伝えれば削除可能であるとする。形成可能な全てのリンクを要素として持つリンクの集合をg^Nと記し[5]、形成可能なネットワークの集合を$G = \{g \subset g^N\}$で表すことにする。

本稿ではネットワークgに新たにリンク$ij \notin g$が形成されたネットワークを$g + ij$と記し、ネットワークgに存在しているリンク$ij \in g$が削除されたネットワークを$g - ij$と記すことにする。

1.2. 利得関数

各ノードはネットワークを通じて他のノードから便益を得ることが出来る。また、ノード間でリンクを形成することができ、その際には費用の拠出が必要となる。ネットワークgにてノ

4 つまり、リンクijとリンクjiは全く同じリンクを表すことになる。
5 このネットワークg^Nは全てのノード間にリンクが形成されており完全ネットワーク(complete network)と呼ばれる。

ードiが他のノードとの間に形成しているリンク集合を$L_i(g)$と記す。ネットワークgにおける任意のノードiの利得関数$u_i(g): g \to R_+$を次式で表すことにする[6]。

$$u_i(g) = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \left(\delta^{d_{ik}(g)} v_{ik}\right) - \sum_{ik \in L_i(g)} c_{ik} \;\; = V_i(g) - C_i(g) \qquad (1)式$$

(1)式において、v_{ik}はノードiがノードkから得る便益であり、v_{ik} >0 である。また、任意の$i, j, k \in N,\ i \neq j \neq k$に関して$v_{ik} = v_{jk}$であるとする。$\delta$は便益伝達率であり、ネットワークを通じてノード間で便益が伝達される際にどの程度伝達されるのかを表すものであり、$0 < \delta < 1$である。任意のノード間の便益の伝達は経路を通じて行われるとする。経路とは 2 つのノード間をリンクを通じて同じノードを 2 度経由しないような経由ノードの順序である[7]。例えばノードi_1とノードi_kとの間の経路は、ノードi_1とノードi_kとの間で経由したノードを経由した順に並べたもの$i_1, \cdots, i_k$（これらのノードは全て異なる）として表す。$d_{ik}(g)$はネットワークgにおけるノードiとノードkとの間の経路において経由するリンク数の最も少ない経路である最短経路の距離（経由するリンクの数）を表している。ノードiとノードkとの間に直接リンクが形成されている場合は$d_{ik}(g) = 1$であり、直接リンクが形成されていない場合には$d_{ik}(g) \geq 2$となる。また、ネットワークgにてノードiとノードkとの間に経路が存在しない場合は$d_{ik}(g) = \infty$であるとする（すなわち、経路の存在しないノード間では便益は伝達されない）。ノードiはノードkからの便益を最短経路である 1 本の経路のみから受け取れる（複数の経路を通じて便益を受け取ることは出来ない）。つまり、ノードiはノードkから便益v_{ik}をそのまま受け取ることは出来ず、ネットワークにおけるリンクを多く経由すればするほどv_{ik}の価値は減少することとなる。以下では$\delta^{d_{ik}(g)} v_{ik}$をネットワーク$g$にてノード$i$がノード$k$から得るネットワーク便益と呼ぼう。

c_{ik}はノードiとノードkとの間に形成されたリンクikに対して拠出するリンク形成費用でありc_{ik} >0 である。もしもノードiとノードkとの間に直接リンクを形成しないならばc_{ik} =0 である。よって、$V_i(g) = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta^{d_{ik}(g)} v_{ik}$はノード$i$がネットワーク$g$にて他のノードから得るネットワーク便益の合計を表し、$C_i(g) = \sum_{ik \in L_i(g)} c_{ik}$はネットワーク$g$にてノード$i$が拠出しているリンク形成費用の総額（リンク形成総費用）を表している。

[6] この利得関数は坂上、加藤、宇野木(2007)にて用いた利得関数であり、Jackson and Wolinsky(1996)の利得関数を各ノード間のネットワーク便益とリンク形成費用を非対称なものへと拡張したものである。
[7] グラフ理論では「道(path)」または「単純道(simple path)」と呼ぶ。

図１　ネットワークg

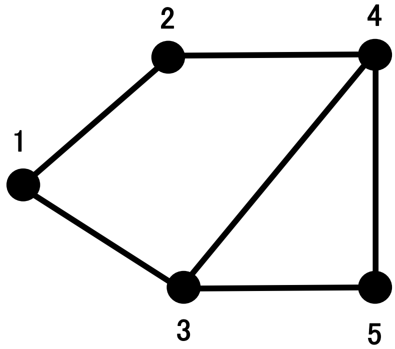


図 1 は 5 つのノードから構成されるネットワークgを表したものである。このネットワークにおけるノード集合は$N = \{1,2,3,4,5\}$、ネットワークは$g = \{12,\ 13,\ 24,\ 34,\ 35,\ 45\}$である。各ノードが他のノードとの間に形成しているリンク集合はそれぞれ$L_1(g) = \{12,\ 13\}$、$L_2(g) = \{12,\ 24\}$、$L_3(g) = \{13,\ 34,\ 35\}$、$L_4(g) = \{24,\ 34,\ 45\}$、$L_5(g) = \{35,\ 45\}$となる。また、図 1 にて各ノードがネットワーク$g$にて得る効用は(1)式の下ではそれぞれ以下のようになる。

$$u_1(g) = \delta(v_{12} + v_{13}) + \delta^2(v_{14} + v_{15}) - (c_{12} + c_{13})$$
$$u_2(g) = \delta(v_{21} + v_{24}) + \delta^2(v_{23} + v_{25}) - (c_{21} + c_{24})$$
$$u_3(g) = \delta(v_{31} + v_{34} + v_{35}) + \delta^2(v_{32}) - (c_{31} + c_{34} + c_{35})$$
$$u_4(g) = \delta(v_{42} + v_{43} + v_{45}) + \delta^2(v_{41}) - (c_{42} + c_{43} + c_{45})$$
$$u_5(g) = \delta(v_{53} + v_{54}) + \delta^2(v_{51} + v_{52}) - (c_{53} + c_{54})$$

2. ネットワークの均衡概念

ネットワーク形成ゲームではネットワークにおいて既存のリンクが削除されずかつ新たにリンクが追加されないというネットワークの安定性（均衡）を表す様々な概念が存在する。以下ではペア安定性とペアナッシュ均衡という 2 つのネットワークの均衡概念を紹介するとともにこれらのネットワーク均衡概念の特徴を比較する。

2.1. ネットワーク形成戦略

各ノードはどのノードとリンクを形成し、どのノードとはリンクを形成しないかを戦略的に決定する。ノードiのリンク形成戦略を$s_i = (s_{i1}, \cdots, s_{ii-1}, s_{ii+1}, \cdots, s_{in}) \in S_i$と記す。ノード$i$のリンク形成戦略集合を$S_i$と記し、全てのノードのリンク形成戦略からなる戦略空間を$S = S_1 \times \cdots \times S_n$

と記す。任意の$i, j \in N,\ i \neq j$に関して$s_{ij} \in \{0,1\}$であり、もしも$s_{ij} = 1$ならばノードiはノードjとの間にリンクを形成したいと思っており、もしも$s_{ij} = 0$ならばノードiはノードjとの間にリンクを形成したくないと思っている。任意のノードi, j間のリンク ij は$min\{s_{ij}, s_{ji}\} = 1$ならば形成されるが、$min\{s_{ij}, s_{ji}\} = 0$ならば形成されないものとする[8]。

2.2. ペア安定性とペアナッシュ均衡

ネットワーク形成ゲームにおいてはネットワークの安定性（均衡）を表す様々な概念が存在する。本稿ではペア安定性とペアナッシュ均衡を考えることにする。

まずペア安定性を紹介しよう。以下が成立するときネットワークgは利得関数$u(g)$に関してペア安定的である。

【ペア安定性】

任意のノード$i,\ j \in N$とリンク$ij \in g$に関して$u_i(g) \geq u_i(g - ij)$かつ$u_j(g) \geq u_j(g - ij)$であり、任意のリンク$ij \notin g$に関して$u_i(g + ij) > u_i(g)$ならば$u_j(g + ij) < u_j(g)$である。

このペア安定性は、ネットワークgにおいて存在している任意の 1 本のリンクを削除した場合にはそのリンクを形成していた両ノードの利得がともに減少するかもしくは変化しないことを求めており、ネットワークg上のリンクを 1 本だけ削除するインセンティブをどのノードも持たないことを要求している。さらに、ネットワークgに新たなリンクを形成したとき、リンクを形成した 2 つのノードのうち一方の利得が増加するならばもう一方のノードの利得は減少しなければならないことを求めており、ネットワークgにて新たに 1 本のリンクを形成しようとしてもリンク形成するノード間で合意が得られない事を要求している。

ここで、ペア安定性がネットワーク安定性を表す概念として十分ではない事を述べておこう。ペア安定性は一度に 1 つのリンクが削除もしくは追加されることのみしか考慮していない。各ノードは複数のリンクを同時に形成・削除することができるので、ペア安定性は各ノードの一部分の戦略のみを対象としており、その限定された戦略の組み合わせの中でのネットワークの均衡概念と考えるべきである。すなわち、ペア安定性はネットワークが安定的であるための必要条件ではあるが十分条件ではない。しかしながら、ペア安定性はモデルにおいて導入が容易

[8] すなわち、ノードi, jがともにリンク形成を希望すれば$min\{s_{ij}, s_{ji}\} = 1$でありどちらか一方でも（もしくは両方とも）リンク形成を望まないならば$min\{s_{ij}, s_{ji}\} = 0$である。

であるという特徴を持ち、安定的なネットワークの集合に関する予測を行うのに有用である[9]。本論文では、ペア安定性の優位性はそのままに欠点を解消してペア安定性がネットワーク均衡の必要十分条件となる為にどのような条件を満たせばよいのかを考察していく。

次にペアナッシュ均衡を紹介しよう。以下が成立するときネットワークgは利得関数$u(g)$に関してペアナッシュ均衡である。

【ペアナッシュ均衡】

任意のノード$i \in N$と任意の$s'_i \in S_i$に関して、$u_i(g(s^*)) \geq u_i(g(s'_i, s^*_{-i}))$であり、かつ任意のノード$i, j \in N$に関してもしも$ij \notin g$ならば$u_i(g(s^*) + ij) \geq u_i(g(s^*))$のとき$u_j(g(s^*) + ij) < u_j(g(s^*))$となるような$s^*$が存在する。

ここで、s_{-i}はノードiを除く全てのノードのリンク形成戦略の組であり、$s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, \cdots, s_{i+1}, \cdots, s_n)$である。ペアナッシュ均衡はネットワーク$g$にて各ノードの戦略において複数のリンクの追加・削除を考慮したうえで、新たなリンクの追加と既存のリンクの削除が起こらない事を要求している。すなわち、ネットワークの均衡概念としてはペア安定性よりもペアナッシュ均衡の方が望ましい。しかしながら、あるネットワークがペアナッシュ均衡であるか否かを確認するためには､各ノードの全てのリンク形成戦略を比較しなければならない。例えば、ノードの数が 30 個の場合には各ノードのリンク形成戦略は$2^{29} = 536870912$通りであり､この 536870912 通りのリンク形成戦略を現在のネットワークでのリンク形成戦略と比較するという作業を各ノードについて（つまり 30 回）行わなければならない。一方、ネットワークがペア安定的であるか否かを確認するためには、ノードの数が 30 個の場合には各ノードに関して 29 通りのリンク形成戦略を現在のネットワークでのリンク形成戦略と比較するという作業を各ノードについて（つまり 30 回）行うだけでいい。

このように、ペアナッシュ均衡はネットワークの均衡概念としては優れているものの、ノード数が増えれば増えるほどにネットワークがペアナッシュ均衡であるか否かの確認は容易ではなくなる。一方、ペア安定性はネットワークの均衡概念としては不十分であるものの、容易にネットワークがペア安定的であるか否かを確認できるという優位性がある。

[9] ペア安定性を精緻化したものとして Dutta and Mutuswami(1997)や Jackson and van den Nouweland(2000)において用いられた強安定性(strong stability)がある。

3. α-サブモジュラー性

ペア安定性は探し出すことは容易だがネットワーク均衡概念としては不十分であり、ペアナッシュ均衡はネットワークの均衡概念としては優れているものの探し出すことが困難であるというジレンマがある。しかし、Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)はこのジレンマを解消し得る研究結果を提示している。以下では、Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)にて示されたペアナッシュ均衡とペア安定性の同値性に関係するα-サブモジュラー性を紹介する。さらに、ペア安定性とペアナッシュ均衡が常に一致するために利得関数が満たすべき条件を考察する。

3.1. α-サブモジュラー性

ペアナッシュ均衡とペア安定性の一長一短の関係性を利得関数に注目して分析したものの中に Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)がある。Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)はペアナッシュ均衡とペア安定性の関係性について分析を行い、ある特徴を持つ利得関数の下ではペアナッシュ均衡とペア安定性が一致することを示した。その帰結は以下の通りである。

$PS(u)$は利得関数uに関してペア安定的なネットワークの集合であり$PNE(u)$は利得関数uに関してペアナッシュ均衡なネットワークの集合であるとする。

【Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)の定理 1】

$PS(u)$において、ネットワーク利得関数uがある$\alpha \geq 0$にてα-サブモジュラー性を満たすならばその場合に限り$PS(u) = PNE(u)$である。

すなわち、ペア安定性が達成されているネットワークにおいて利得関数がα-サブモジュラー性を満たすならば、そのネットワークはペアナッシュ均衡も達成されているのである。ではα-サブモジュラー性とはどのような性質なのかを以下で示そう。

【α-サブモジュラー性】

$\alpha \geq 0$としよう。ネットワーク利得関数uは$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{G}$において以下の性質を満たすならばその時に限り$\alpha$-サブモジュラー的である。

任意の$g \in \mathrm{A}, i \in N, l_i(g) \subseteq L_i(g)$に関して以下が成立する。

$$u_i(g) - u_i(g - l_i(g)) \geq \alpha \sum_{ik \in l_i(g)} [u_i(g) - u_i(g - ik)] \qquad (2)式$$

ここで$l_i(g)$はgにおいてノードiが形成しているリンクの部分集合であり、ノードiがgにてリ

ンクを削除しようとするリンクの集合を表している。(2)式の左辺はネットワークgにて存在する複数のリンクを同時に削除したときのノードiの利得の変化を表しており、(2)式の左辺はネットワークgにて存在するそれぞれのリンクを 1 本削除した場合の利得の変化分の合計を表している。(2)式は$\alpha = 0$とすることで右辺が正で左辺が負の状況でない限りは成立する。もしもネットワークgがペア安定的であるならば、任意の$\alpha \geq 0$ に関して(2)式の右辺部分は 0 以上となる。

もしもモデルにて用いられている各ノードの利得関数が任意のネットワークにおいてα-サブモジュラー性を満たすならば、ペア安定的なネットワークは常にペアナッシュ均衡である事が保証される。一方、モデルにて用いられている各ノードの利得関数が任意のネットワークにおいてα-サブモジュラー性を満たすわけではない場合には、ペア安定的なネットワークを見つけたとしてもそのネットワークがペアナッシュ均衡であるとは限らない。そのネットワークがペアナッシュ均衡であるか否かはそのネットワークにおいて利得関数がα-サブモジュラー性を満たす事を確認しなければならない。この確認作業はペアナッシュ均衡ネットワークを探し出すほどではないものの、大規模なネットワークを分析する際にはかなりの負担となる[10]。

3.2. サブモジュラー性を満たす利得関数

以上の背景を考慮すると、任意のネットワークにてα-サブモジュラー性を満たす利得関数を見出す事は有益であるといえる。この事に関係する分析を Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)は論文内の Clame1 で示しており、任意のネットワークにおいて Jackson and Wolinsky(1996)の利得関数がサブモジュラー性を満たす事を示している。

以下の命題 1 は、Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)では分析されていない、任意のネットワークにて利得関数がサブモジュラー性を満たすための十分条件を明示したものである。また、命題 2 は Jackson and Wolinsky(1996)の利得関数を非対称化した(1)式が命題 1 で示した任意のネットワークにて利得関数がサブモジュラー性を満たすための十分条件を満たすことを明らかにしている。この事は Calvó-Armengol and İlkılıç(2009)における Clame1 の一般化に対応しており、この点は本稿の学術的貢献である。以下の【命題 1】証明は数学付録にて行う。

[10] 例えば、あるネットワークgにおけるノードの数が 30 個で、あるノードiが形成しているリンクの数が 10 本だったとしよう。このネットワークgがペア安定的だった場合に、さらにペアナッシュ均衡であるか否かを確認するためには、任意の $l_i(g) \subseteq g_i$に関して(2)式の左辺部分が 0 以上となる事を確認しなければならない。この場合、ノードiが形成している 10 本のリンクの削除の組み合わせの合計(全くリンクを削除しない状況を除く)である$\sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k = 6527$通りのリンク削除のパターンの全てでノード$i$の利得が減少しない事を確認する必要がある。さらに、ノードi以外の全てのノードにも同様の事を確認する必要がある。

【命題 1】次の(条件１)〜(条件３)を満たす利得関数は任意のネットワークにおいてサブモジュラー性を満たす。

(条件１)利得関数$u_i(g)$はネットワーク便益関数$V_i(g): g \to R_+$とリンク形成総費用関数$C_i(g): g \to R_+$が(3)式のように加法分離可能である。

$$u_i(g) = V_i(g) - C_i(g) \qquad \text{(3)式}$$

(条件２) $V_i(g)$は任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して

$$\left[V_i\big(g - l_i(g)\big) - V_i(g - l_i(g) - ij)\right] \geq [V_i(g) - V_i(g - ij)] \qquad \text{(4)式}$$

である。

(条件３) $C_i(g)$は任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して

$$\left[C_i\big(g - l_i(g)\big) - C_i(g - l_i(g) - ij)\right] \leq [C_i(g) - C_i(g - ij)] \qquad \text{(5)式}$$

である。

上述の（条件２）はネットワーク$g - l_i(g)$からリンクijを削除した際にノードiの得るネットワーク便益の変化（(4)式左辺部分）がネットワークgからリンクijを削除した際にノードiの得るネットワーク便益の変化（(4)式右辺部分）よりも大きくなることを要求している。この事は、自身が形成しているリンクが少なければ少ないほど同じリンクであろうともリンク削除によるネットワーク便益の減少が大きい（または変わらない）事を意味している。または、自身が形成しているリンクが少なければ少ないほど新たに形成するリンクから得るネットワーク便益は大きい（または変わらない）という事を意味している[11]。次に（条件 3）はネットワーク$g - l_i(g)$からリンクijを削除した際のノードiのリンク形成総費用の変化（(5)式左辺部分）がネットワークgからリンクijを削除した際のノードiのリンク形成総費用の変化（(5)式右辺部分）よりも小さくなることを要求している。この事は、自身が形成しているリンクが少なければ少ないほど同じリンクであろうともリンク削除によるリンク形成総費用の減少が小さい（または変わらない）事を意味している。または、形成しているリンクが少なければ少ないほど新たに形成する

[11] 例えば、$g - l_i(g) - ij \equiv g'$ とすれば(4)式は以下のようになる。

$$V_i(\underbrace{g - l_i(g)}_{=g'+ij}) - V_i(\underbrace{g - l_i(g) - ij}_{=g'}) \geq V_i(\underbrace{g}_{=g'+l_i(g)+ij}) - V_i(\underbrace{g - ij}_{=g'+l_i(g)})$$

$$\Leftrightarrow V_i(g' + ij) - V_i(g') \geq V_i\big(g' + l_i(g) + ij\big) - V_i\big(g' + l_i(g)\big)$$

これは、ネットワークg'に新たにリンクijを追加した場合のノードiが得るネットワーク便益の合計の変化の方がネットワーク$g' + l_i(g)$に新たにリンクijを追加した場合のネットワーク便益の合計の変化よりも大きい（または等しい）事を意味する。

リンクのコストは小さい（または変わらない）という事である[12]。

次に、(1)式が(条件１)～(条件 3)を満たす利得関数であることを示す。そのために、(1)式を以下の(6)式へと変形する。

$$u_i(g)=V_i(g)-C_i(g)=\left[\delta\sum_{k\in N_i(g)}v_{ik}+\delta\sum_{i'\in M_i(g)}V_{j'i'}(g)\right]-\left[\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}\right] \quad (6)式$$

(6)式における$N_i(g)$はgにてノードiが直接リンクを形成しているノード集合を表しており、$M_i(g)$はgにてノードiが直接リンクを形成していない（自分自身を除く）ノード集合を表している。$V_{j'i'}(g)$ はノードiが直接リンクを形成しているノードの中でノードi'と最も短い経路で繋がっているノード$j'\in N_i(g)$がノードi'から得るネットワーク便益であり、以下の式で表される[13]。

$$V_{j'i'}(g)=Max(\delta^{d_{j_1i'}(g)}v_{j_1i'},\cdots,\delta^{d_{j_mi'}(g)}v_{j_mi'})$$

(6)式の$\delta\sum_{k\in N_i(g)}v_{ik}$は$g$にてノード$i$が直接リンクを形成しているノードから得るネットワーク便益の合計であり、$\delta\sum_{i'\in M_i(g)}V_{j'i'}(g)$は$g$にてノード$i$が直接リンクを形成していないノードから得るネットワーク便益の合計である。ここで、ノードiはノードj'から直接リンクを通じて$\delta V_{j'i'}(g)$のネットワーク便益を得ているので、ネットワークgにおいてノードiがノードj'から得るネットワーク便益は$V_{ii'}(g)=\delta V_{j'i'}(g)$となる。すなわち、(6)式でのネットワーク便益関数は$V_i(g)=\delta\sum_{k\in N_i(g)}v_{ik}+\sum_{i'\in M_i(g)}V_{ii'}(g)$であり、リンク形成総費用関数は$C_i(g)=\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}$である。

以下ではまず(6)式におけるネットワーク便益関数$V_i(g)$が(条件 2)を満たす事を示し、その後(6)式におけるリンク形成総費用関数$C_i(g)$が(条件３)を満たす事を示そう。

いま、gからノードiとノードjとの間に形成されているリンク$ij\in L_i(g)$を削除したネットワークを$g-ij$と記すと、(6)式右辺における最初の大括弧で括られた部分に対応する$V_i(g-ij)$は以

---

12 例えば、$g-l_i(g)-ij\equiv g'$ とすれば(5)式は以下のようになる。

$$C_i(\underbrace{g-l_i(g)}_{=g'+ij})-C_i(\underbrace{g-l_i(g)-ij}_{=g'})\geq C_i(\underbrace{g}_{=g'+l_i(g)+ij})-C_i(\underbrace{g-ij}_{=g'+l_i(g)})$$
$$\Leftrightarrow c_i(g'+ij)-c_i(g')\geq c_i\big(g'+l_i(g)+ij\big)-c_i\big(g'+l_i(g)\big)$$

これは、ネットワークg'に新たにリンクijを追加した場合にノードiが負担するリンク形成費用の合計の変化の方がネットワーク$g'+l_i(g)$に新たにリンクijを追加した場合に負担するリンク形成費用の合計の変化よりも大きい（または等しい）事を意味する。

13 例えば、図１においてノード１はノード４とは直接リンクを形成していないものの、次の３つの経路の中の１つの最短経路を通じてネットワーク便益を得ることが出来る。

経路１：ノード４→ノード２→ノード１
経路２：ノード４→ノード３→ノード１
経路３：ノード４→ノード５→ノード３→ノード１

最短経路は２つのリンクを経由している経路１と経路２なので、ノード１がノード４から得ることのできるネットワーク便益は

$$V_{14}(g)=Max(\delta^2v_{14},\delta^2v_{14},\delta^3v_{14})=\delta^2v_{14}$$

となる。

下のようになる。

$$V_i(g-ij)=\delta\sum_{k\in N_i(g-ij)}v_{ik}+\sum_{i'\in M_i(g-ij)}V_{ii'}(g-ij)$$

また、ネットワークがgから$g-ij$へと変化した際にノードiが得るネットワーク便益の変化は以下のようになる。

$$V_i(g)-V_i(g-ij)=\delta\underbrace{\left[\sum_{k\in N_i(g)}v_{ik}-\sum_{k\in N_i(g-ij)}v_{ik}\right]}_{=v_{ij}}$$
$$+\left[\sum_{i'\in M_i(g)}V_{ii'}(g)-\underbrace{\sum_{i'\in M_i(g-ij)}V_{ii'}(g-ij)}_{=\left[\sum_{i'\in M_i(g)}V_{ii'}(g-ij)\right]+V_{ij}(g-ij)}\right]\qquad(7)式$$

ここで、(7)式右辺部分第 1 項目はネットワークがgから$g-ij$へと変化したときにノードiが直接リンクを形成しているノードから得るネットワーク便益の合計の変化を表している。ネットワークがgの状況では、ノードiとノードjとの間にリンクが形成されていたので、$j\in N_i(g)$である。しかし、$g-ij$においてはリンクijが削除されたためにノードiはノードjから直接リンクでネットワーク便益を得ることが出来なくなっている。すなわち、$j\notin N_i(g-ij)$である。したがって、(7)式右辺部分第 1 項目は以下のようになる。

$$\delta\left[\sum_{k\in N_i(g)}v_{ik}-\sum_{k\in N_i(g-ij)}v_{ik}\right]=\delta v_{ij}$$

また、(7)式右辺部分の$\sum_{i'\in M_i(g-ij)}V_{ii'}(g-ij)$において$i'$として対象としているノードの中にノード$j$が含まれている事を踏まえると、(7)式は以下の(8)式のように変形することが出来る。

$$V_i(g)-V_i(g-ij)=\delta v_{ij}+\left[\sum_{i'\in M_i(g)}V_{ii'}(g)-\sum_{i'\in M_i(g)}V_{ii'}(g-ij)-V_{ij}(g-ij)\right]$$
$$=\underbrace{\left[\delta v_{ij}-V_{ij}(g-ij)\right]}_{RHS1}+\underbrace{\sum_{i'\in M_i(g)}\left[V_{ii'}(g)-V_{ii'}(g-ij)\right]}_{RHS2}\qquad(8)式$$

(8)式にて、$RHS1\equiv\delta v_{ij}-V_{ij}(g-ij)$, $RHS2\equiv\sum_{i'\in M_i(g)}\left[V_{ii'}(g)-V_{ii'}(g-ij)\right]$と表すことにする。

　次に、(6)式右辺における最初の大括弧で括られた部分に対応する$V_i(g-l_i(g))$は以下のように表される。

$$V_i(g-l_i(g))=\delta\sum_{k\in N_i(g-l_i(g))}v_{ik}+\sum_{i'\in M_i(g-l_i(g))}V_{ii'}(g-l_i(g))$$

ここで、$l_i(g)$は$l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$であるようなリンク集合である。また、ネットワーク$g-l_i(g)$から$ij \in L_i(g)$を削除した際にノード$i$が得るネットワーク便益の変化は以下のようになる。

$$V_i(g-l_i(g)) - V_i(g-l_i(g)-ij) = \delta \underbrace{\left[\sum_{k \in N_i(g-l_i(g))} v_{ik} - \sum_{k \in N_i(g-l_i(g)-ij)} v_{ik}\right]}_{=v_{ij}}$$
$$+\left[\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g))} V_{ii'}(g-l_i(g)) - \sum_{i' \in M_i(g-l_i(g)-ij)} V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)\right] \text{(9)式}$$

ここで、(9)式右辺部分第 1 項目はネットワークが$g-l_i(g)$から$g-l_i(g)-ij$へと変化したときに直接リンクを形成しているノードから得るネットワーク便益の変化を表している。ネットワークが$g-l_i(g)$の場合には$j \in N_i(g-l_i(g))$だが、$g-l_i(g)-ij$の場合には$j \notin N_i(g-l_i(g)-ij)$である。したがって、(9)式右辺部分第 1 項目は以下のようになる。

$$\delta\left[\sum_{k \in N_i(g-l_i(g))} v_{ik} - \sum_{k \in N_i(g-l_i(g)-ij)} v_{ik}\right] = \delta v_{ij}$$

また、(9)式右辺部分の$\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g)-ij)} V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)$において$i'$として対象としているノードの中にノード$j$も含まれている事を踏まえると、(9)式は以下の(10)式のように変形することが出来る。

$$V_i\big(g-l_i(g)\big) - V_i(g-l_i(g)-ij)$$
$$= \delta v_{ij} + \left\{\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g))} V_{ii'}(g-l_i(g)) \right.$$
$$\left. - \underbrace{\left[\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g))} V_{ii'}(g-l_i(g)-ij) + V_{ij}(g-l_i(g)-ij)\right]}_{=\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g)-ij)} V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)} \right\}$$
$$= \underbrace{\big[\delta v_{ij} - V_{ij}\big((g-l_i(g)-ij)\big)\big]}_{RHS3}$$
$$+\underbrace{\left\{\sum_{i' \in M_i(g-l_i(g))} \big[V_{ii'}\big(g-l_i(g)\big) - V_{ii'}\big(g-l_i(g)-ij\big)\big]\right\}}_{RHS4} \text{(10)式}$$

(10)式にて、$RHS3 \equiv \delta v_{ij} - V_{ij}(g-l_i(g)-ij)$, $RHS4 \equiv \sum_{i' \in M_i(g)} \big[V_{ii'}(g-l_i(g)) - V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)\big]$と表そう。

以下の補題 1 と補題 2 は(8)式と(10)式内の RHS1 と RHS3 との大小関係と RHS2 と RHS4

との大小関係に関するものである。これら【補題 1】、【補題 2】、【補題 3】、【補題 4】、【命題 2】の各証明は数学付録にて行う。

【補題 1】任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して RHS1≤RHS3 である。

【補題 2】任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して RHS2≤RHS4 である。

補題 1、補題 2 から、(1)式の$V_i(g)$について以下の補題 3 が導出される。
【補題 3】(1)式の$V_i(g)$は任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して(条件２)を満たす。

また、(1)式の$C_i(g)$について以下の補題 3 が導出される。
【補題 4】(1)式の$C_i(g)$は任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して(条件 3)を満たす。

補題 3、補題 4 から以下の命題 2 が導出される。

【命題 2】(1)式の利得関数は任意のgにてサブモジュラー性を満たす。

おわりに

本稿ではペア安定性とペアナッシュ均衡の特徴を示し、これらの均衡概念の比較を行った。また、ペア安定性とペアナッシュ均衡が一致する為に重要なサブモジュラー性を任意のネットワークにおいて満たすための十分条件を示した。そして、坂上、加藤、宇野木(2007)にて用いた利得関数がこの十分条件を満たす事を証明した。

本稿では坂上、加藤、宇野木(2007)にて用いた利得関数が任意のネットワークにおいてサブモジュラー性を満たす事を示したが、筆者はこの利得関数以外にもかなり幅広い利得関数がα-サブモジュラー性を満たす事を確認している。この分析をさらに進めることによって、大規模なネットワークの均衡分析や動学的なネットワーク形成アルゴリズムへの応用が可能ではないかと思っている。

参考文献

[1] Bala V. and S. Goyal (2000), "A Non-cooperative Model of Network Formation", *Econometrica*, 68, 1181-1229.

[2] Calvó-Armengol, A. and İlkılıç (2009). "Pairwise-stability and Nash equilibria in network formation", *International Journal of Game Theory*, 38, pp.51–79.

[3] Calvó-Armengol, A. and Jackson, M.O. (2004) "Social Networks in Determining Employment: Patterns, Dynamics, and Inequality", *American Economic Review*, 94, pp.426-454.

[4] Dutta, B., and Mutuswami, S. (1997) "Stable Networks", *Journal of Economic Theory*, 76, pp.322-344.

[5] Furusawa, T. and H. Konishi (2005) "Free Trade Networks with Transfers", *Japanese Economic Review*, 56, pp.144-164.

[6] Furusawa, T. and H. Konishi (2007) "Free Trade Networks," *Journal of International Economics*, 72, pp.310-335.

[7] Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J., (2006), "Network Formation with Heterogeneous Players", *Games and Economic Behavior*, 54, pp. 353-372.

[8] Goyal, S. and Joshi, S. (2006) "Bilateralism and Free Trade," *International Economic Review*, 47, pp.749-778.

[9] Kranton, R. and D. Minehart (2001) "A Theory of Buyer-Seller Networks", *American Economic Review*, 91, pp.485-508.

[10] Jackson, M. O. and A. Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 71, pp.44-74.

[11] Jackson, M.O. and van den Nouweland, A. (2005) "Strongly Stable Networks," *Games and Economic Behavior*, 51, pp.420-440.

[12]Johnson, C. and Gilles, R.P. (2000) "Spatial Social Networks," *Review of Economic Design*, 5, pp.273-300.

[13] Wang, P. and A. Watts (2005) "Formation of Buyer-Seller Trade Networks in a Quality-Differentiated Product Market," *Canadian journal of Economics*, 39, pp.971-1004.

[14] 坂上智哉、加藤康彦、宇野木広樹 (2007)「九州の最適ネットワークについて - ネットワーク形成ゲーム理論による自治体統合問題のモデリングとシミュレーション - 」,『応用経済学研究』, 第 1 巻, pp.73-88.

数学付録

【命題 1 の証明】

(条件 2)は任意の$l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$, $ij \in L_i(g)$について成立するので、$l_i(g) = \emptyset$とすれば以下のようになる。

$$[V_i(g) - V_i(g - ij_1)] = [\, V_i(g) - V_i(g - ij_1)] \qquad \text{(A1)式}$$

$l_i(g) = \{ij_1\}$とすれば以下のようになる。

$$[V_i(g - ij_1) - V_i(g - ij_1 - ij_2)] \geq [\, V_i(g) - V_i(g - ij_2)] \qquad \text{(A2)式}$$

$l_i(g) = \{ij_1, ij_2\}$とすれば以下のようになる。

$$[V_i(g - ij_1 - ij_2) - V_i(g - ij_1 - ij_2 - ij_3)] \geq [\, V_i(g) - V_i(g - ij_3)] \qquad \text{(A3)式}$$

$l_i(g) = \{ij_1, ij_2, \cdots ij_m\}$とすれば以下のようになる。

$$\left[V_i(g - ij_1 - ij_2 \cdots - ij_{m-1}) - V_i\big(g - l_i(g)\big)\right] \geq [\, V_i(g) - V_i(g - ij_m)] \qquad \text{(A4)式}$$

ここで、$V_i(g) - V_i\big(g - l_i(g)\big)$を以下のように変形しよう。

$$\begin{aligned} & V_i(g) - V_i\big(g - l_i(g)\big) \\ &\quad = [V_i(g) - V_i(g - ij_1)] + [V_i(g - ij_1) - V_i(g - ij_1 - ij_2)] \\ &\quad + [V_i(g - ij_1 - ij_2) - V_i(g - ij_1 - ij_2 - ij_3)] + \\ &\quad \cdots + \left[V_i(g - ij_1 - ij_2 \cdots - ij_{m-1}) - V_i\big(g - l_i(g)\big)\right] \end{aligned} \qquad \text{(A5)式}$$

(A1)式から(A5)式より、任意の$i \in N$, $g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して以下が成立する。

$$\begin{aligned} & V_i(g) - V_i\big(g - l_i(g)\big) \\ &\quad = [V_i(g) - V_i(g - ij_1)] + \underbrace{[V_i(g - ij_1) - V_i(g - ij_1 - ij_2)]}_{\geq V_i(g) - V_i(g - ij_2)} \\ &\quad + \underbrace{[V_i(g - ij_1 - ij_2) - V_i(g - ij_1 - ij_2 - ij_3)]}_{\geq V_i(g) - V_i(g - ij_3)} + \\ &\quad \cdots + \underbrace{\left[V_i(g - ij_1 - ij_2 \cdots - ij_{m-1}) - V_i\big(g - l_i(g)\big)\right]}_{\geq V_i(g) - V_i(g - ij_m)} \\ &\quad \geq [V_i(g) - V_i(g - ij_1)] + [\, V_i(g) - V_i(g - ij_2)] \\ &\quad + [\, V_i(g) - V_i(g - ij_3)] + \cdots + [\, V_i(g) - V_i(g - ij_m)] \\ &\quad = \sum_{ik \in l_i(g)} [V_i(g) - V_i(g - ik)] \end{aligned} \qquad \text{(A6)式}$$

次に、(A6)式の導出と同様にすれば、(条件 3)から任意の$i \in N$, $g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して以下が成立する。

$l_i(g)=\{ij_1,ij_2,\cdots ij_m\}$であると仮定しよう。

$$C_i(g)-C_i\big(g-l_i(g)\big)$$

$$=[C_i(g)-C_i(g-ij_1)]+\underbrace{[C_i(g-ij_1)-C_i(g-ij_1-ij_2)]}_{\le C_i(g)-C_i(g-ij_2)}$$

$$+\underbrace{[C_i(g-ij_1-ij_2)-C_i(g-ij_1-ij_2-ij_3)]}_{\le C_i(g)-C_i(g-ij_3)}+$$

$$\cdots+\underbrace{\big[C_i(g-ij_1-ij_2\cdots-ij_{m-1})-C_i\big(g-l_i(g)\big)\big]}_{\le C_i(g)-C_i(g-ij_m)}$$

$$\le\sum_{ik\in l_i(g)}[C_i(g)-C_i(g-ik)] \qquad \text{(A7)式}$$

(A6)式と(A7)式から任意の$i\in N,\ g\in G, l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\}, ij\in L_i(g)$に関して以下が成立する。

$$u_i(g)-u_i\big(g-l_i(g)\big)$$

$$=\underbrace{\big[V_i(g)-V_i\big(g-l_i(g)\big)\big]}_{\ge\sum_{ij\in l_i(g)}[V_i(g)-V_i(g-ij)]}-\underbrace{\big[C_i(g)-C_i\big(g-l_i(g)\big)\big]}_{\le\sum_{ij\in l_i(g)}[C_i(g)-C_i(g-ij)]}$$

$$\ge\sum_{ij\in l_i(g)}[V_i(g)-V_i(g-ij)]-\sum_{ij\in l_i(g)}[C_i(g)-C_i(g-ij)]$$

$$=\sum_{ik\in l_i(g)}[u_i(g)-u_i(g-ik)] \qquad \text{(A8)式}$$

この(A8)式は(2)式にて$\alpha=1$としたものに一致する。すなわち、条件１～３を満たす利得関数は任意のネットワークgにおいてサブモジュラー性を満たす。

Q.E.D.

【補題１の証明】

ここでは RHS1 と RHS3 との比較を行う。RHS1 はネットワークgからリンク$ij\in L_i(g)$を削除したときのノードiがノードjから得るネットワーク便益の変化分を表しており、RHS3 はネットワーク$g-l_i(g)$からリンク$ij\in L_i(g)$を削除したときのノードiがノードjから得るネットワーク便益の変化分を表している。ネットワーク$g-ij$とネットワーク$g-l_i(g)-ij$におけるノードiとノードjとの間の最短経路の距離を比較すると以下のようになる。

$$d_{ij}(g-ij)\le d_{ij}(g-l_i(g)-ij)$$

この事から以下が成立する。

$$V_{ij}(g-ij)\ge V_{ij}(g-l_i(g)-ij) \qquad \text{(A9)式}$$

(A9)式より、RHS1 と RHS3 の大小関係に関して以下のことが成立する。

$$RHS1 - RHS3 = \left[\delta v_{ij} - V_{ij}(g - ij)\right] - \left[\delta v_{ij} - V_{ij}(g - l_i(g) - ij)\right]$$
$$= V_{ij}(g - l_i(g) - ij) - V_{ij}(g - ij) \leq 0 \qquad \text{(A10)式}$$

(A10)式は任意のネットワークg、任意のノードi、任意のリンクij、$l_i(g)$の削除に関して成立する。したがって、任意の$i \in N,\ g \in G, l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}, ij \in L_i(g)$に関して$RHS1 \leq RHS3$である。

Q.E.D.

【補題 2 の証明】

ここでは RHS2 と RHS4 との比較を行う。RHS2 はネットワークgからリンク$ij \in L_i(g)$を削除した場合に、リンクを形成していないノードからノードiが得るネットワーク便益の合計の変化分を表しており、RHS4 はネットワーク$g - l_i(g)$からリンク$ij \in L_i(g)$を削除した場合に、リンクを形成していないノードからノードiが得るネットワーク便益の合計の変化分を表している。任意のネットワークにおいて、どのようなノードであっても、自身が形成したリンクを 1 本削除する場合に、リンクを形成していないノードから受け取るネットワーク便益の変化は以下で示す（ケース 1 ）から（ケース 4）のいずれかに該当する。そこで、（ケース 1 ）から（ケース 4）のそれぞれの状況において、ノードiが形成しているリンクを 1 本削除するとノードiとリンクを形成していないノードi'からノードiが得るネットワーク便益がどのように変化するのかに注目する。その後、各ケースにおける RHS2 と RHS4 の大小関係を考える。

以下の分析では、(ケースx)にてネットワークgにおけるノードiと直接リンクを形成していない任意のノードをi'、ノードi'の集合を$M_i^x(g)$と表すことにする。また、ネットワークgにてノードiが形成しているリンクの中から削除する任意のノード集合を$l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$、ネットワーク$g$またはネットワーク$g - l_i(g)$からノード$i$が 1 本削除するリンクを$ij \in L_i(g)$，$ij \notin l_i(g)$と表すことにする。また、ノード$i$が形成しているリンクの中でノード$i$とノード$i'$の間の最短経路において経由されるリンクの集合を$l_i^{ii'}(g)$と表し、ノード$i$が形成しているリンクの中でリンク$ij$以外のノード$i$とノード$i'$の間の最短経路において経由されるリンクの集合を$\bar{l}_i^{ii'}(g)$と表そう[14]。

[14] 例えば、図 1 においてノード 1 がノード 4 からネットワーク便益を得る際の最短経路は以下の 2 つが存在する。
経路 1：ノード 4→ノード 2→ノード 1
経路 2：ノード 4→ノード 3→ノード 1
したがって、図 1 にて$l_1^{14}(g) = \{12{,}13\}$である。また、リンク 12 以外のノード 1 とノード 4 の間の最短経路において経由されるノード 1 が形成しているリンク集合は$\bar{l}_1^{14}(g) = \{13\}$である。

（ケース１）

ネットワークgにてノードiとノードi'との間に経路が存在していない状況を考えよう（図 2 を参照)。この状況は、ネットワークgにてノードiと直接リンクを形成している全てのノードがノード$i' \in M_i^1(g)$からネットワーク便益を受け取ることが出来ていない状況でもある。この状況ではノードiが形成しているどのリンクを 1 本削除したとしてもネットワークgの時と同様にノードiはノードi'からネットワーク便益を受け取ることが出来ない。すなわち、$V_{ii'}(g) = V_{ii'}(g-ij) = 0$である。この事は任意のネットワーク$g$における任意のノード$i$、任意のノード$i' \in M_i^1(g)$、任意のリンク$ij \in L_i(g)$に関して成立する。したがって、(ケース 1)において以下が成立する。

$$RHS2 = \sum_{i' \in M_i^1(g)} \underbrace{[V_{ii'}(g) - V_{ii'}(g-ij)]}_{=0} = 0 \qquad (A11)式$$

また、(ケース 1)ではネットワークgにてノードiが形成しているリンクを何本削除したとしてもノードiはノードi'からネットワーク便益を受け取ることが出来ない。つまり、(A11)式は$g = g - l_i(g)$としても成立する。すなわち、(ケース 1)において任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して以下が成立する。

$$RHS4 = \sum_{i' \in M_i^1(g)} \underbrace{[V_{ii'}(g-l_i(g)) - V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)]}_{=0} = 0 \qquad (A12)式$$

(A11)式と(A12)式から、(ケース 1)の状況では任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して$RHS2 = RHS4$である。

（ケース 2）

ネットワークgにてノードiとノードi'との間に経路が存在するものの、ノードiとノードi'との間の最短経路がリンクijを経由しない状況を考えよう (図 3 を参照)。もしもネットワークgからノードiとノードi'の間の最短経路上で経由されない任意のリンク$ij \notin l_i^{ii'}(g)$を削除したとしてもノードiとノードi'の間の最短経路に変化はない。すなわちこの場合は$V_{ii'}(g-ij) = V_{ii'}(g)$である。この事は任意の$i' \in M_i^2(g)$について成立する。したがって、(ケース 2)において以下が成立する。

$$RHS2 = \sum_{i' \in M_i^2(g)} \underbrace{[V_{ii'}(g) - V_{ii'}(g-ij)]}_{=0} = 0 \qquad (A13)式$$

次にネットワーク$g - l_i(g)$からリンク$ij \notin l_i^{ii'}(g)$を削除する場合を考えよう。まず、リンク集合$l_i(g)$が$l_i(g) \cap l_i^{ii'}(g) \neq l_i^{ii'}(g)$である場合を考える。この場合、ネットワーク$g - l_i(g)$ではノード$i$とノード$i'$との間に経路は存在しているので、ネットワーク$g - l_i(g)$からリンク$ij \notin l_i^{ii'}(g)$を

削除したとしてもノードiとノードi'の間の最短経路に変化はない。すなわちこの場合は$V_{ii'}(g - l_i(g) - ij) = V_{ii'}\left(g - l_i(g)\right)$である。次に$l_i(g) \supseteq l_i^{ii'}(g)$である場合を考える。この場合、ネットワーク$g - l_i(g)$ではノード$i$とノード$i'$との間に経路は存在しない。したがって、ネットワーク$g - l_i(g)$からリンクijを削除したとしてもネットワーク$g - l_i(g)$の時と同様にノードiとノードi'との間に経路は存在しない。すなわちこの場合は$V_{ii'}(g - l_i(g) - ij) = V_{ii'}\left(g - l_i(g)\right)$である。この事は任意の$i' \in M_i^2(g)$について成立する。以上のことから、(ケース 2)において任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して以下が成立する。

$$RHS4 = \sum_{i' \in M_i^2(g)} \underbrace{\left[V_{ii'}\left(g - l_i(g)\right) - V_{ii'}(g - l_i(g) - ij)\right]}_{=0} = 0 \qquad (A14)\text{式}$$

(A13)式と(A14)式から、(ケース 2)の状況では任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して$RHS2 = RHS4$である。

（ケース３）

ネットワークgにてノードiとノードi'の間に経路が存在し、かつノードiとノードi'の間の最短経路がリンク$ij = l_i^{ii'}(g)$を経由する経路のみである状況を考えよう（図 4 を参照。ノードiとノードi'の間の最短経路は複数存在してもよいがそれら全ての最短経路はリンクijを経由している状況）。この状況はネットワークgにおいてノードiはリンクijのみを通じてノードi'からのネットワーク便益を得ている状況である。この状況でリンクijが削除されると、ノードiはノードi'からのネットワーク便益をネットワークgの時の最短経路よりも多くのリンクを経由する別の経路から受け取る事となる。すなわち、$V_{ii'}(g - ij) < V_{ii'}(g)$となる。この事は任意の$i' \in M_i^3(g)$について成立する。したがって、(ケース 3)において以下が成立する。

$$RHS2 = \sum_{i' \in M_i^3(g)} \underbrace{\left[V_{ii'}(g) - V_{ii'}(g - ij)\right]}_{>0} > 0 \qquad (A15)\text{式}$$

次にネットワーク$g - l_i(g)$からリンク$ij \notin l_i^{ii'}(g)$を削除する場合を考えよう。$l_i(g)$として$l_i(g) \not\ni ij$であるリンク集合を考える。この場合、ネットワーク$g - l_i(g)$ではノードiとノードi'との間にリンクijを経由する最短経路が存在している。この状況からリンクijを削除すると、ノード iはノードi'からのネットワーク便益をネットワークgの時の最短経路よりも多くのリンクを経由する別の経路から受け取る事となる。すなわち、$V_{ii'}(g - l_i(g) - ij) < V_{ii'}\left(g - l_i(g)\right)$となる。この事は任意の$i' \in M_i^3(g)$について成立する。したがって、(ケース 3)において任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して以下が成立する。

$$RHS4 = \sum_{i' \in M_i^3(g)} \underbrace{\left[V_{ii'}\left(g - l_i(g)\right) - V_{ii'}(g - l_i(g) - ij)\right]}_{>0} > 0 \qquad (A16)\text{式}$$

ここで、ノード i とノードi'の間の最短経路の距離をネットワーク$g-l_i(g)-ij$とネットワーク$g-ij$とで比較すると、$d_{ii'}(g-ij) \leq d_{ii'}(g-l_i(g)-ij)$となる（ネットワーク$g-l_i(g)-ij$ではネットワーク$g$の時よりも多くのリンクが削除されているのでノード i とノードi'の間の経路が長くなっている状況がある）。すなわち、(ケース３)においては任意の$i' \in M_i^3(g)$について以下が成立する。

$$V_{ii'}(g-ij) \geq V_{ii'}(g-l_i(g)-ij) \qquad \text{(A17)式}$$

(A15)式、(A16)式、(A17)式から、(ケース 3)において任意の $l_i(g) \subseteq L_i(g) \setminus \{ij\}$に関して$RHS2 \leq RHS4$である。

（ケース 4）

ネットワークgにてノードiとノードi'の間に経路が存在し、かつノードiとノードi'の間の最短経路についてリンクijを経由する経路とリンクijを経由しない経路の 2 種類の最短経路が存在する状況を考えよう（図 5 を参照）。この場合、ネットワークgにおいてノードiがノードi'からのネットワーク便益を得る最短経路においてリンクijを経由する最短経路とリンクijを経由しない最短経路がそれぞれ 1 本以上存在する。この場合にリンクijが削除されると、ネットワーク$g-ij$ではノードiはノードi'からのネットワーク便益をリンクijを経由しない別の最短経路を通じてネットワークgの時と同様のネットワーク便益を得ることが出来る。すなわち、$V_{ii'}(g-ij) = V_{ii'}(g)$となる。この事は任意の$i' \in M_i^4(g)$について成立する。したがって、(ケース 4)において以下が成立する。

$$RHS2 = \sum_{i' \in M_i^4(g)} \underbrace{[V_{ii'}(g) - V_{ii'}(g-ij)]}_{=0} = 0 \qquad (A18)\text{式}$$

次にネットワーク$g-l_i(g)$からリンク$ij \in l_i^{ii'}(g)$を削除する場合を考えよう。まず、リンク集合$l_i(g)$が$l_i(g) \cap \bar{l}_i^{ii'}(g) = \bar{l}_i^{ii'}(g)$である場合を考える。この場合、ネットワーク$g-l_i(g)$ではノード$i$とノード$i'$との間にリンク$ij$を経由する最短経路のみが存在している（リンク$ij$を経由する最短経路以外の経路はリンク集合$\bar{l}_i^{ii'}(g)$が削除されているために存在しない)。この状況からリンクijを削除すると、ノードiはノードi'からのネットワーク便益をネットワークgの時の最短経路よりも多くのリンクを経由する別の経路から受け取る事となる。すなわち、$V_{ii'}(g-l_i(g)-ij) < V_{ii'}\left(g-l_i(g)\right)$となる。次にリンク集合$l_i(g)$が$l_i(g) \cap \bar{l}_i^{ii'}(g) \neq \bar{l}_i^{ii'}(g)$である場合を考える。この場合、ネットワーク$g-l_i(g)$においてノード$i$がノード$i'$からのネットワーク便益を得る最短経路においてリンクijを経由する最短経路とリンクijを経由しない最短経路がそれぞれ存在していることになる。この状態でリンクijを削除したとしてもノードiはノードi'からのネットワーク便益をリンクijを経由しない別の最短経路を通じてネットワーク$g-l_i(g)$の時と同様の

ネットワーク便益を得ることが出来る。すなわち、$V_{ii'}\,(g-l_i(g)-ij)=V_{ii'}\,\big(g-l_i(g)\big)$となる。この事は任意の$i'\in M_i^4(g)$について成立する。したがって、(ケース 4)において任意の $l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\}$に関して以下が成立する。

$$RHS4=\sum_{i'\in M_i^4(g)}\underbrace{\left[V_{ii'}\big(g-l_i(g)\big)-V_{ii'}(g-l_i(g)-ij)\right]}_{\geq 0}\geq 0 \qquad (A19)\text{式}$$

したがって、 (A18)式と(A19)式から、(ケース 4)において任意の $l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\}$に関して$RHS2\leq RHS4$である。

任意のノードの利得関数は同一であり、いかなるネットワークからどのノードが形成したリンクを 1 本削除するとしても 2 つのノード間で伝達されるネットワーク便益の変化は(ケース 1)から(ケース 4) のいずれかに該当する。すなわち、(ケース 1)から(ケース 4)までの分析結果は任意の$i\in N,\ g\in G, ij\in L_i(g)$に関して成立する。したがって、任意の$i\in N,\ g\in G, l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\},\ ij\in L_i(g)$に関して RHS2≤RHS4 である。

Q.E.D.

【補題 3 の証明】

補題 2 と補題 3 から、以下のように(1)式の$V_i(g)$は任意の$i\in N,\ g\in G, l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\},\ ij\in L_i(g)$に関して(条件 2)を満たす事が示される。

$$\begin{aligned}&[V_i(g-l_i)-V_i(g-l_i-ij)]-[V_i(g)-V_i(g-ij)]\\&=(RHS3+RHS4)-(RHS1+RHS2)\\&=\Big(\underbrace{RHS3-RHS1}_{\geq 0}\Big)+(\underbrace{RHS4-RHS2}_{\geq 0})\geq 0\end{aligned}$$

Q.E.D.

【補題 4 の証明】

任意の$i\in N,\ g\in G, l_i(g)\subseteq L_i(g)\setminus\{ij\},\ ij\in L_i(g)$に関して、(1)式の下では$C_i\big(g-l_i(g)\big)-C_i(g-l_i(g)-ij)$と$C_i(g)-C_i(g-ij)$はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned}&C_i\big(g-l_i(g)\big)-C_i(g-l_i(g)-ij)\\&=\left(\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}-\sum_{ik\in l_i(g)}c_{ik}\right)-\left(\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}-\sum_{ik\in l_i(g)}c_{ik}-c_{ij}\right)=c_{ij}\end{aligned}$$

$$C_i(g)-C_i(g-ij)=\left(\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}\right)-\left(\sum_{ik\in L_i(g)}c_{ik}-c_{ij}\right)=c_{ij}$$

すなわち、

$$C_i\big(g - l_i(g)\big) - C_i(g - l_i(g) - ij) = C_i(g) - C_i(g - ij)$$

これは(条件 3)を満たす。

Q.E.D.

【命題 2 の証明】

(1)式の利得関数は任意のgにて明らかに(条件 1)を満たす。また、補題 3、補題 4 から(条件 2)と(条件 3)も満たす。以上より、(1)式の利得関数は任意のgにてサブモジュラー性を満たす。

Q.E.D.

図2

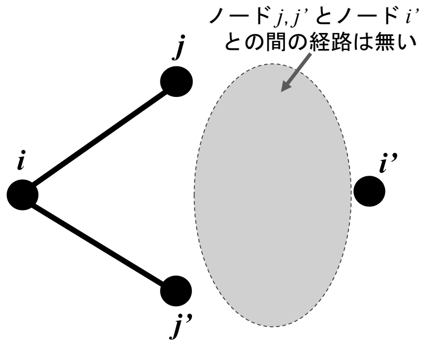


図3

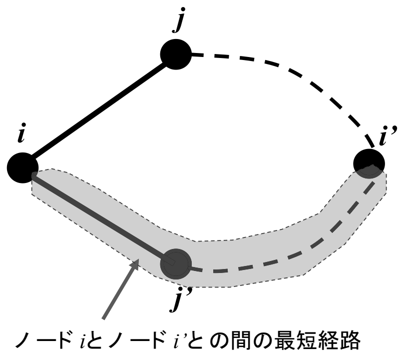


図4

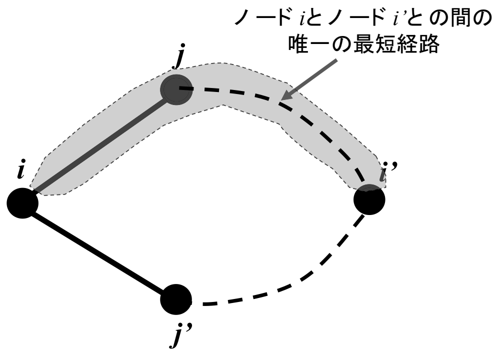
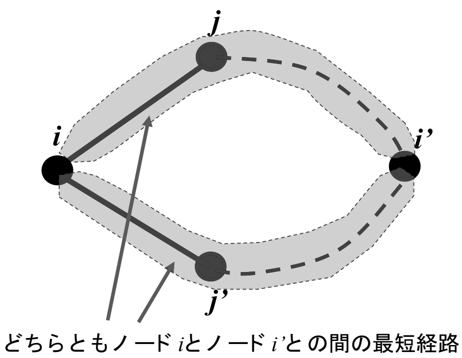


図5



Summary

A Study of Payoff Function that Satisfies Submodularity

Hiroki Unoki

"Network formation game" is one of economics research field, which focuses on behavior and incentives of each node, where each node would strategically choose whether or not to form a link and network is formed as a result of such choices. In network formation game study, there exists several concept of network equilibrium.

In this paper, we compare pros and cons of "pairwise stability" and "pairwise Nash equilibrium". In Calvó-Armengol and İlkılıç (2009), α-submodularityis introduced as an important factor to make pairwise stability and pairwise Nash equilibrium coincide. In this paper, we show that the sufficient condition to achieve submodularity and payoff function in Sakagami, Kato, Unoki (2007) satisfies this sufficient condition.