

平常時におけるジョンソン Su 分布を仮定した VaR 推定の有効性評価*

吉 田 洋 一

要 約

本研究は、Value-at-Risk 推定の手法におけるパラメトリック法とヒストリカル法を取り上げて比較分析する。特に、パラメータ数が多いジョンソン Su 分布を仮定した Value-at-Risk 推定に注目する。分析の結果、バックテストをはじめ複数の項目でジョンソン Su 分布を仮定した Value-at-Risk 推定の有効性を確認することができた。

1 はじめに

Value-at-Risk 推定の手法としてヒストリカル・シミュレーションが数多くの大手金融機関で利用されている。一般にヒストリカル法のメリットとして、「過去の分布をそのまま利用する¹⁾」ことが挙げられる。しかしヒストリカル・シミュレーションにおいて、実際にはパラメータの過去データを利用しているが、最終的に Value-at-Risk 推定値を決定する分布が存在しないケースが多い。つまり、ヒストリカル・シミュレーションによって推定される分位点を決めるひとつの予測分布が存在しないため、現実の観測分布と比較することができない。

また、一般的に金融機関におけるリスク管理においては、平常時には Value-at-Risk 推定を重要視し、異常時には追加的にストレステストを実施して結果を反映させている。ここで異常時とは大きなマイナス変動が発生した日およびその後に大きなマイナス変動の影響があると判断できる期間を指している。一方、平常時とは異常時と判断されない期間を指している。Value-at-Risk 推定においては観測期間というユニークな概念が存在し、一旦大きなマイナス変

※ 本稿作成にあたり、本誌匿名レフェリーより貴重なコメントをいただいたことに深く感謝したい。

1 過去の分布をそのまま利用する方法は、本研究で扱う「ヒストリカル法」である。観測データを小さい値から並べて、小さい方から何番目という方法で分位点を決定する。いわゆる順位統計量を求める方法である。ただし、分位点の値の変動頻度が小さく、大きなマイナス変動が発生すると長期間に渡り高いレベルにへばりつくという欠点があるため、決定した分位点を Value-at-Risk 推定値として採用することは少ない。

動が発生するとその観測期間（たとえば500日）に対して影響を及ぼし続けるという特徴がある。

本研究では、評価基準日の経験分布（観測分布）を重要視しており、観測分布にのみ依存するジョーンソン Su 分布を仮定したパラメトリックな手法を分析・評価する。ジョーンソン Su 分布は4つのパラメータにより形状が決まる確率分布であり、2つのパラメータにより形状が決まる正規分布を代表とする対称分布より、現実の観測分布に近似できることはまちがいない。さらに、観測分布の歪み・尖りにも対応できる。このジョーンソン Su 分布を仮定した Value-at-Risk 推定の優位性を考察する。対称分布の中ではファットテイルな分布である双曲線正割分布を仮定した Value-at-Risk 推定の精度が良いだろうと予測できるため、特にジョーンソン Su 分布と双曲線正割分布との比較に重点を置き分析する。

先行研究としては、Miura and Oue [2000] ではロジスティック分布等を用いて Value-at-Risk 推定の適合性を検証している。久保田 [2009] ではパラメトリックな Value-at-Risk 推定手法として両側指数分布²を用いた手法を提案し、正規分布と比較して両側指数分布のパフォーマンスの良さを示している。本研究では上記2文献では扱っていない、双曲線正割分布とジョーンソン Su 分布に特に注目している。また、磯貝 [2014] は、切断安定分布を仮定して、その推定を行った上で Value-at-Risk や Expected Shortfall の検証を行っている。しかしながら切断安定分布自体になじみがなく実務で利用するのは困難と思われる。そこで本研究では正規分布やロジスティック分布との親和性があるジョーンソン Su 分布を採用する。

本研究の構成は以下の通りである。2節では、Value-at-Risk 推定におけるパラメータ等の前提と分析手順を述べる。3節では、Value-at-Risk 推定結果および3つの分析結果を述べる。最後に全体のまとめとしてジョーンソン Su 分布を仮定した Value-at-Risk 推定の有効性を考察する。

2 前提と分析手順

Value-at-Risk 推定には、代表的な手法が3つある。第一には分散共分散法があり、分散共分散行列を使って相関の影響を反映させるパラメトリックな手法となる。第二はヒストリカル法と呼ばれるノンパラメトリックな手法であり、その代表的な手法としてリスクファクター変動に過去データを使ってシミュレートするヒストリカル・シミュレーションがある。第三は乱数を用いてシミュレートするモンテカルロ法であり、通常、モンテカルロ・シミュレーションと呼ばれる。Value-at-Risk 推定値を決定する方法はヒストリカル法とモンテカルロ法では同じと

2 両側指数分布は本研究では「ラプラス分布」と呼ぶ。ラプラス分布は形状が極端なため観測分布との全体の当てはまりが芳しくないことが多いという特徴がある。

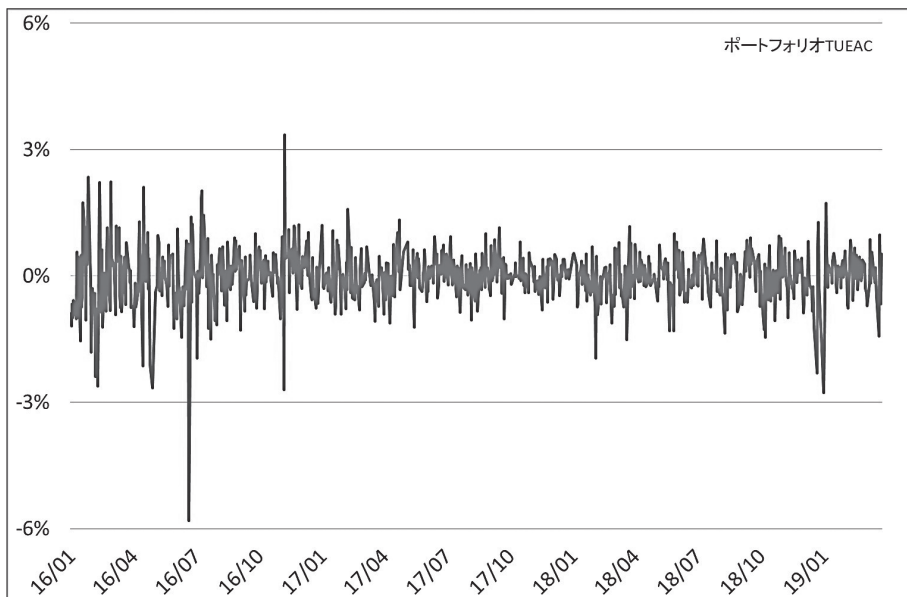
なり、小さい順に並べて何番目、つまり順位統計量を求めている。

2-1 Value-at-Risk 推定とリスクファクターの前提

本研究では4つの対称分布とジョーンソン Su 分布については第一の分散共分散法の基礎となるパラメトリック法³を採用する。

Value-at-Risk 推定には計測の前提として、保有期間と信頼水準を決定する必要がある。保有期間はポートフォリオを保有し続ける期間またはリスク量を計測する期間を示す。本研究では保有期間を最短の1日、信頼水準を一般的な99%とする。リスクファクターに関しては株価指数 TOPIX、外国為替 米ドル (USD)、ユーロ (EUR)、豪ドル (AUD)、加ドル (CAD) とし、日々の対数収益率ベースでの合算とする。本研究においてはこの想定ポートフォリオを「ポートフォリオ TUEAC」と呼ぶ。評価期間は2018年4月から2019年3月までの1年間とする。観測期間は500日とし、図表1、図表2で示したように2016年1月から2019年3月ま

図表1 観測データの推移 (2016.01-2019.03)

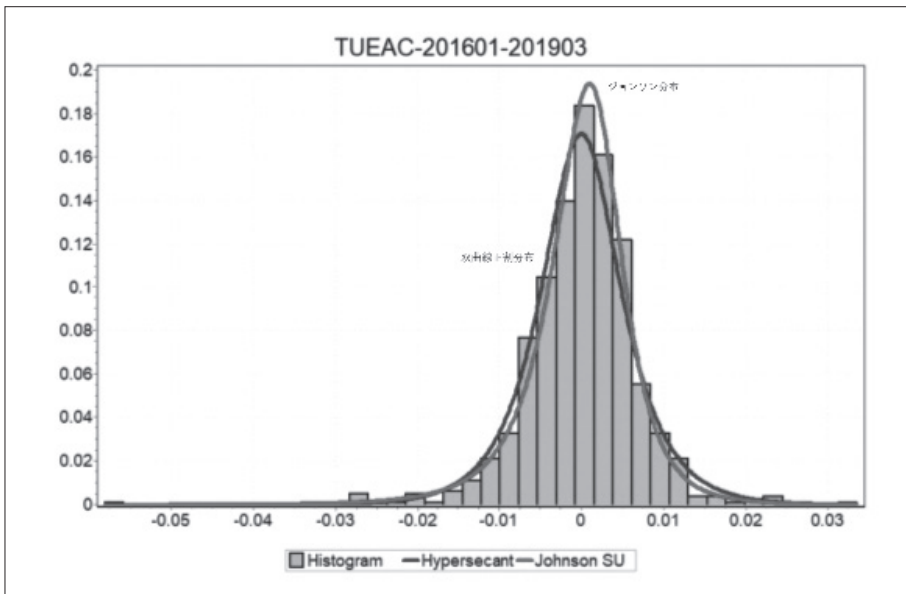


※ 2016年1月から2019年3月までのデータのうち、-3%以下となるのは2016年6月24日だけとなり、これは英国のEU離脱が国民投票により決定した日である。値は-5.805%であり、この極端に大きなマイナス変動は観測期間500日の間、VaR推定値に影響を及ぼす。

出所：筆者作成

3 パラメトリック法はパラメータに依存した手法であり、任意の確率分布を仮定する。

図表 2 取得データのヒストグラム



※尖った分布形状となっている曲線がジョンソン Su 分布であり，分布の頂点が低い曲線が双曲線正割分布である。

出所：筆者作成

でのデータを使用している。図表 2 では取得した全データをヒストグラムで表し，同時に観測分布のパラメータより推計した双曲線正割分布とジョンソン Su 分布の密度関数を図示している。

本研究の Value-at-Risk 推定においては，仮定する確率分布として正規分布，ロジスティック分布，双曲線正割分布，ラプラス分布およびジョンソン Su 分布を採用している。計測手法については上記，パラメトリック法に加え，参考としてヒストリカル法およびブートストラップ法による Value-at-Risk 推定も行う。なお，採用した確率分布の分布関数の逆関数等については，Appendix A に示した。

GARCH に代表される時系列モデルでは，条件付き確率を重要視する条件付きアプローチ⁴で利用され，評価時点までの情報が入手できるという前提のもとで保有期間でのリスク評価に利用される場合がある。一方，一般的なリスク計測では，評価日 1 日の市場変動に対するリスク量を評価日における観測分布から計算することが多い。したがって無条件アプローチではボ

4 条件付きアプローチと無条件アプローチについては磯貝 [2014] を参照した。

ラティリティ変動の推計を行わず、本研究では無条件アプローチを採用する。

2-2 分析の手順

まず、Value-at-Risk 推定の計算結果を視覚的に分析し、つぎにポートフォリオ対数収益率の観測分布の基本統計量を計算・図示し、視覚的にわかることを評価する。さらに大きく変動した日と前日の、実現値であるヒストグラムと予測値である観測分布を、確率密度関数と累積分布関数により適合度を分析・評価する。最後に、バックテスト⁵により予測分布が観測分布を捉えているか検証を行う。

Value-at-Risk 推定の計算結果についてはその推移の原因を探ることが可能となる。たとえば対称分布とジョンソン Su 分布を並記すれば、歪度と尖度の影響が強い期間、逆に歪度と尖度の影響が弱いあるいはない期間が明確になる。

基本統計量を分析すると、平均では収益率の全体的な傾向を知ることができる。標準偏差の推移を把握できていれば、ある程度 Value-at-Risk 推定の推移の結果も予測できる。歪度と尖度については標準偏差に連動することが予想でき、大きな変動のタイミングを確実に識別することができる。

適合度の分析においては「適合率」と「捕捉率」という概念を導入する。まず評価期間全体に対して、適合度が最も良好な確率分布の比率を「適合率」とした。また仮定した各確率分布の、実現値に対する捕捉割合を「捕捉率」とした。個別では観測分布のヒストグラムと予測の密度関数を並記することで適合の程度やヒストグラムのファットテイル⁶の有無を確認でき、他の観測日との比較分析も可能となる。観測分布の累積ヒストグラムと予測の分布関数ではファットテイルの程度を明確にすることができる。また観測分布のヒストグラムと同様に、他の観測日の分布形状の比較分析も可能となる。ここでは大きな変動が発生した観測日とその前日のグラフを並記して比較している。

最後にバックテストではモデルの予測値とそれに対応する実現値を比較して、実現値の超過回数を調べることにより、モデルの有効性を確認する。

5 バックテストについては Appendix D に『マーケット・リスクに対する所要自己資本額算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテストングを利用するための監督上のフレームワーク（日本銀行仮訳）の概要を示した。

6 ファットテイルとは、平均から極端に離れた事象の発生する確率が正規分布から予想される確率よりも高い現象をいう。結果としてリスクを過小評価する可能性があることが問題となっている。本研究では正規分布以外の分布においても同様な意味合いでファットテイルという言葉を使用している。

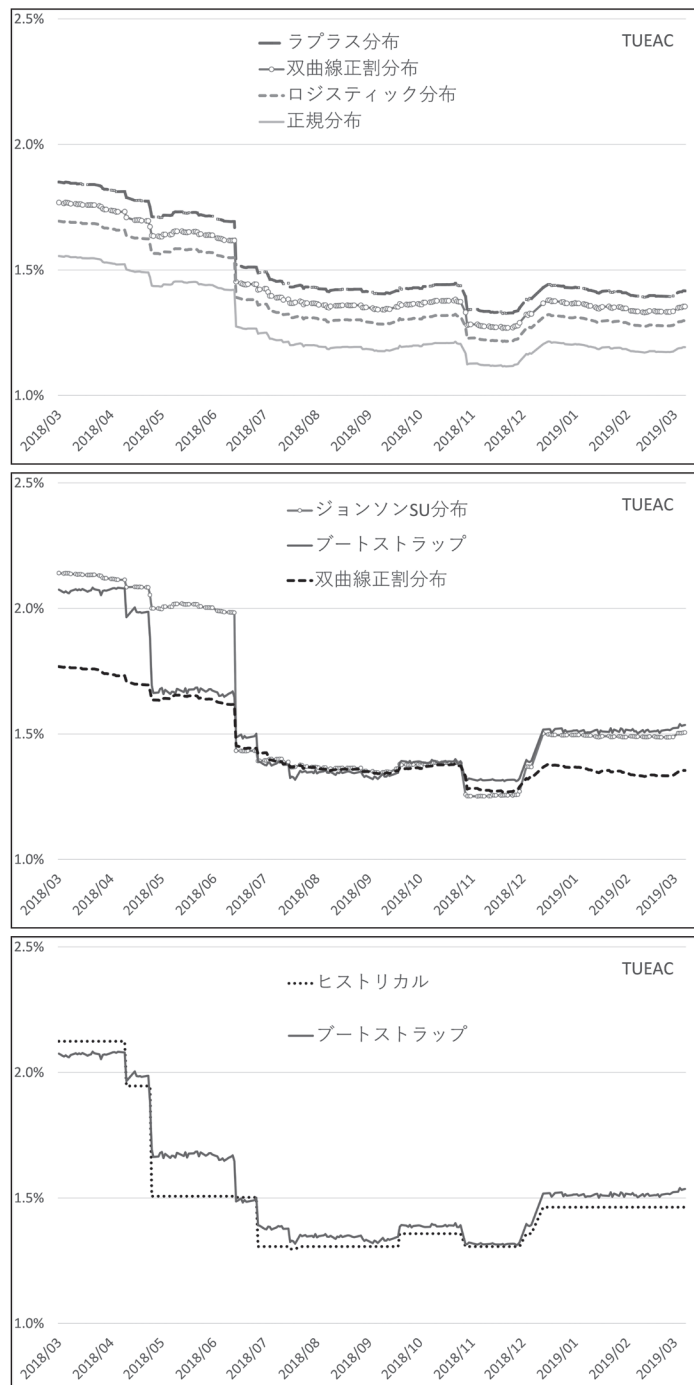
3 分析の結果

3-1 Value-at-Risk 推定の計算結果

Value-at-Risk 推定の計算結果については図表 3 に示した。予想していたように当初はリスク量が大きくなるが、徐々に小さくなっていく。7 月と 11 月に大きく低下して、約 1 ヶ月間低位安定となり、12 月下旬に 2 回のマイナス変動を受けて、この評価期間では唯一の上昇となる。図表 3 上図を見ればわかるように、正規分布、ロジスティック分布、双曲線正割分布、ラプラス分布を仮定した Value-at-Risk 推定の推移は水準に違いはあるものの推移のしかたはほぼ同じである。図表 3 中図では対称分布の代表として双曲線正割分布、4 つのパラメータで形状が決まるジョンソン Su 分布、そしてヒストリカル法を基準としたブートストラップ法による Value-at-Risk 推定を図示した。ここでは 2 つの確率分布を仮定した Value-at-Risk 推定とブートストラップ法による Value-at-Risk 推定の結果の水準が長い期間において近似していることに注目した。ジョンソン Su 分布を仮定した Value-at-Risk 推定とブートストラップ法による Value-at-Risk 推定は 2018 年 7 月から 12 月までの 6 ヶ月間、ほぼ同じ水準となっている。さらに双曲線正割分布を仮定した Value-at-Risk 推定とブートストラップ法による Value-at-Risk 推定は 2018 年 5 月から 12 月までの 8 ヶ月間、ほぼ同じ水準となっていることがわかった。図表 3 下図ではヒストリカル法による推定値とバイアスを除去したブートストラップ法による推定値を図示した。ほぼすべての期間でブートストラップ法による推定値がヒストリカル法による推定値より大きくなることがわかった。

平常時におけるジョンソン Su 分布を仮定した
VaR 推定の有効性評価*

図表3 Value-at-Risk 推定結果



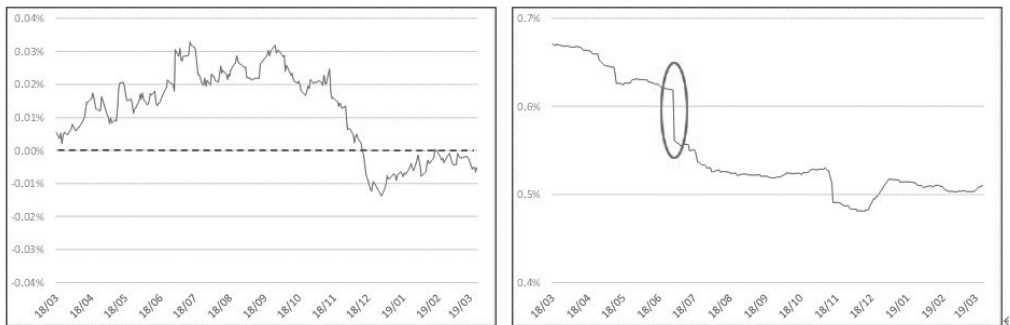
出所：筆者作成

3-2 基本統計量の分析結果

図表4左図、観測分布の平均のグラフでは、当初より平均がプラスで徐々に上昇し続けるが、12月でマイナスとなった。12月下旬から大きくマイナスとなりその後も1月に入り上昇に転じて一瞬だけプラスになるが、マイナスで横這った。図表4右図、標準偏差のグラフは図表3で示した対称分布を仮定した Value-at-Risk 推定のグラフとほぼ同じ推移を示している。ここでは図表5、6で示した歪度と尖度の推移を中心に考察していく。

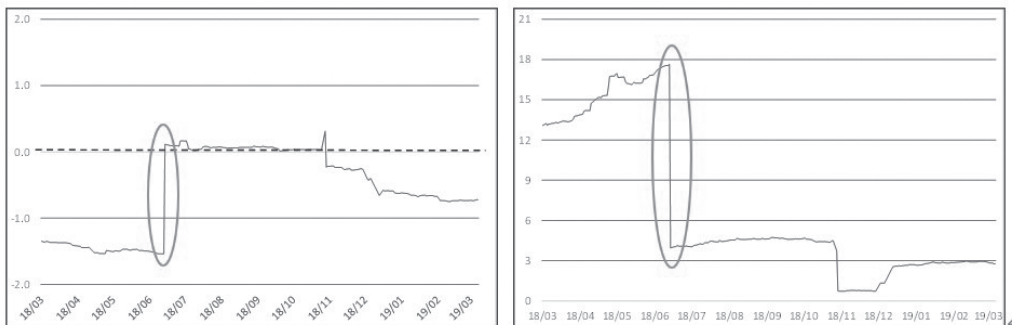
まず評価期間である2018年4月から2019年3月の期間において大きな変動が3回発生した。1回目は2018年7月の大きなマイナス変動が抜けるケースである。2回目は2018年11月の大きなプラス変動とマイナス変動が続けて抜けるケースである。3回目は12月のマイナス変動

図表4 ポートフォリオ収益率における観測分布の平均と標準偏差



出所：筆者作成

図表5 ポートフォリオ収益率における観測分布の歪度と尖度



出所：筆者作成

が続けて加わるケースである。これにより、評価期間を4つに区分することとする。第1期を2018年4月より7月、第2期を7月より11月、第3期を11月より12月末、第4期を2019年1月より3月とする。

観測分布の歪度のグラフにおいて、第1期では極端にマイナスに歪んだ分布となっていたが、7月に大きなマイナス変動が観測分布から抜けたことにより、第2期では歪度がほぼ0となった。第3期の変換点において歪度のグラフだけいびつな形のグラフとなっているが、ここでは大きなプラス変動が観測分布から抜け、続けて大きなマイナス変動が観測分布から抜けることが原因となった。第4期では評価期間で初めてリスク量が増加することとなるが、マイナス変動が2回発生した影響を受けて徐々にマイナスに歪んだ分布となっていくことがわかる。

最後に、観測分布の尖度のグラフを見ると、最も変換点を識別しやすいことがわかった。当初から尖度が13超という異常な値であるが、7月までに尖度が18付近まで上昇しさらに異常な状況が続いた。これは極端に大きなマイナス変動と極端に大きなプラス変動を残してその近辺の大きな変動が徐々に抜けていくことで、尖度が上昇し続けたと判断した。第2期では少し低下したものの尖度は4超であり、けっしてレベルが低いとは言えない。第3期に入ってようやく低レベルと呼べるレベルまで低下した。第4期では2回のマイナス変動の影響を受け、少し上昇した。基本統計量の分析では変換点を探し出すことに役立つことがわかったことは非常に有益である。また、それぞれの統計量の変動原因を探る手助けとなることもまちがいない。

3-3 適合度の分析結果

ここで評価期間250日の適合度検定⁷の結果（適合回数と適合率）を図表6に示す。適合回数が最も多いのはジョンソン Su 分布であり、2番目は双曲線正割分布となった。この2つの合計で全体の7割5分となり、4分の3を占める。また、ジョンソン Su 分布を仮定した場合の実現値の捕捉率も調査して結果を図表7に示した。判定[捕捉できる]は捕捉できているケース、判定[捕捉できない]は捕捉できていないケース、である。判定[捕捉できる]、つまりジョンソン Su 分布で捕捉できているのは全250日中210日となり、捕捉率では84.0%となった。ラプラス分布では250日中156日となり、捕捉率は62.4%となった。ただしラプラス分布は図表6に示したように当てはまりはあまり良くなく、形状の特性が影響して捕捉率が高くなっていると考えている。一方、双曲線正割分布の捕捉率が48.4%となっており、適合率と捕捉率の両方を考慮するとジョンソン Su 分布の次に良い結果となった。

7 本研究では適合度検定の1つであるアンダーソン・ダーリング検定を利用しており、アンダーソン・ダーリング検定の統計量等の数式を Appendix B に示した。

図表 6 評価期間（250 日）の適合率

ポートフォリオ TUEAC	適合回数	適合率
ジョンソン SU 分布	96	38%
ラプラス分布	61	24%
双曲線正割分布	92	37%
ロジスティック分布	1	0%
	250	100%

出所：筆者作成

図表 7 仮定した確率分布の捕捉率

判定	ジョンソン SU 分布		ラプラス分布		双曲線正割分布		ロジスティック分布	
	回数	捕捉率	回数	捕捉率	回数	捕捉率	回数	捕捉率
捕捉できる	210	84.0%	156	62.4%	121	48.4%	61	24.4%
捕捉できない	40	16.0%	94	37.6%	129	51.6%	189	75.6%
	250	100.0%	250	100.0%	250	100.0%	250	100.0%

出所：筆者作成

図表 8～11 において各図表左側には、各観測日の観測分布のヒストグラムと予測の密度関数を表示した。各図表右側には、各観測日の観測分布の累積ヒストグラムと予測の分布関数を表示した。図表 8 から図表 11 までの見方については、左図、観測分布のヒストグラムと密度関数では主にヒストグラムの形状変化を比較している。右図、観測分布の累積ヒストグラムと分布関数では主に縦軸 0.01、つまり 1% 分位点を比較して分布関数<累積ヒストグラムとなるか否かを確認している。分布関数<累積ヒストグラムであれば、予測分布が観測分布を捉えていると判断した。逆に分布関数>累積ヒストグラムであれば、予測分布が観測分布を捉えていないと判断した。ここでは前々節で述べたように、パラメトリック法として双曲線正割分布と

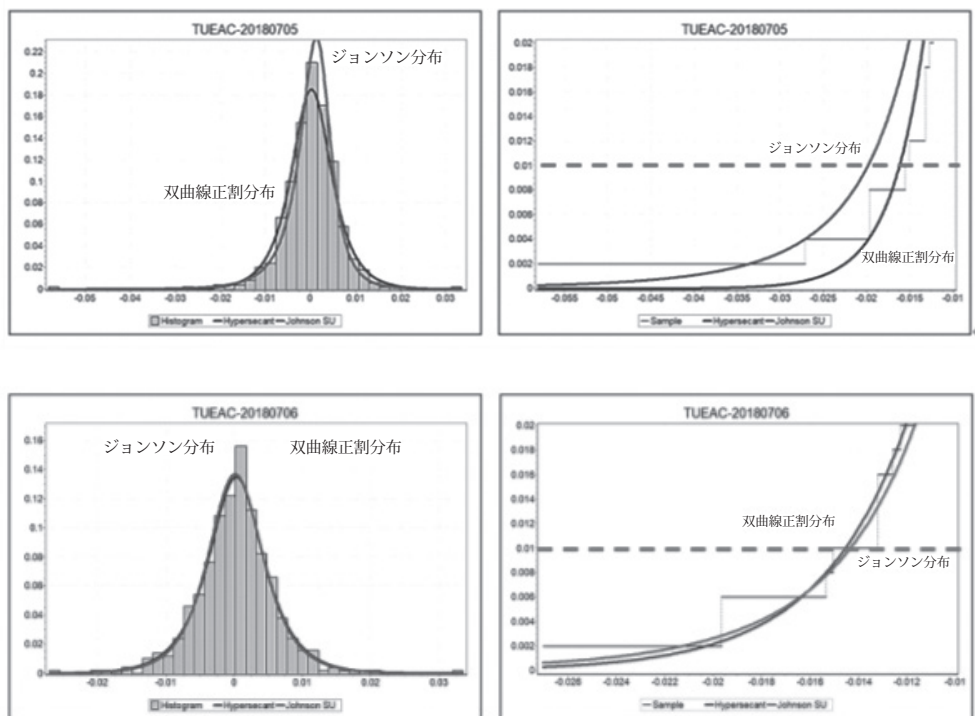
平常時におけるジョンソン Su 分布を仮定した
VaR 推定の有効性評価*

ジョンソン Su 分布を取り上げる。

図表 8 左図において 7 月 5 日と 6 日の変化は見ての通り、大きくマイナスに歪んだ分布が少しプラスに歪んだ分布へとまったく異なった分布形状に変化している。この変化は評価期間で最も大きな変化となった。原因は前日まで観測分布に入っていた極端に大きなマイナス変動 -5.805% が観測分布から抜けたことである。右図において 5 日はジョンソン Su 分布では実現値を捉えているが、双曲線正割分布では捉えきれていない。6 日では両者とも実現値を捉えておらず、その乖離は些少となった。

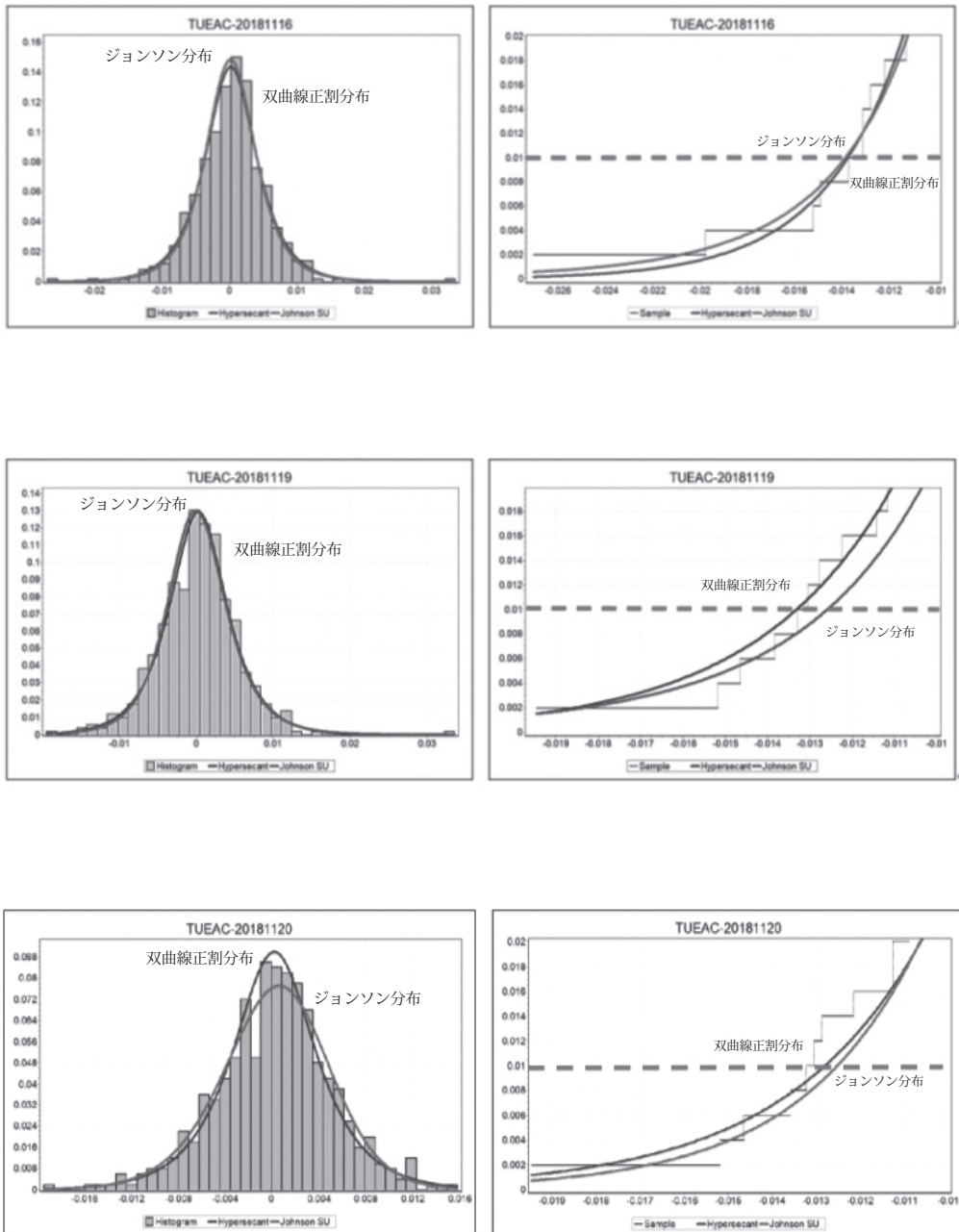
図表 9 左図において 11 月 16 日から 20 日までの変化は、16 日で少しプラスに歪んだ分布が 19 日ではマイナス変動が観測分布から抜けた影響を受け大きくプラスに歪んだ分布形状に変化している。さらに 20 日では今度はプラス変動が観測分布から抜けた影響を受け左右対称に近い分布形状に変化している。右図においては 16 日では両者とも実現値を捉えていないが、

図表 8 前日からの変化 (7/5 と 7/6)



出所：筆者作成

図表 9 前日からの変化 (11/16 と 11/19 と 11/20)



出所：筆者作成

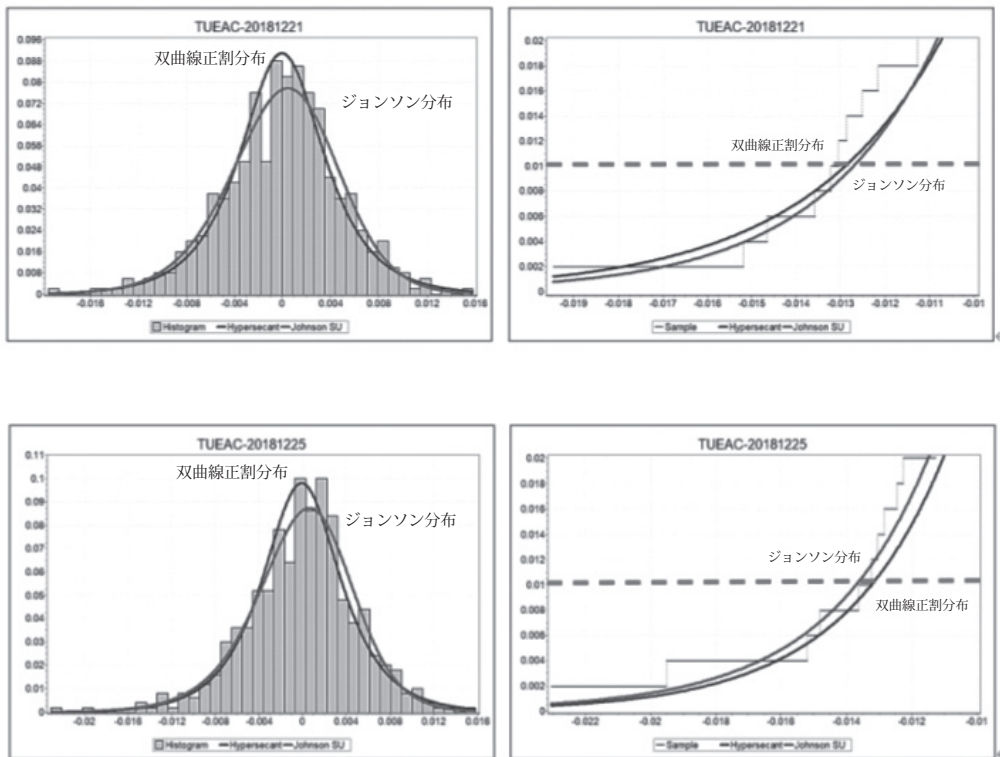
平常時におけるジョンソン Su 分布を仮定した
VaR 推定の有効性評価*

その乖離は些少である。19日は双曲線正割分布ではわずかながら実現値を捉えきれておらず、ジョンソン Su 分布ではまったく捉えきれていない。さらに20日では両者とも実現値を捉えていない。

図表 10 左図において12月21日と25日の変化は小さく視覚的にはわかりにくいですが、確かに-2.305%が加わって範囲が少しマイナスに伸びている。右図において21日ではジョンソン Su 分布と双曲線正割分布、両方とも少し外れており実現値を捉えていない。25日ではジョンソン Su 分布は実現値を捉えているが双曲線正割分布は捉えていない。

図表 11 左図においても12月28日と1月4日の変化は小さく視覚的にはわかりにくいですが、ここでも-2.773%が加わって範囲が少しマイナスに伸びている。右図において28日ではジョンソン Su 分布は実現値を捉えているが双曲線正割分布は捉えていない。1月4日ではジョンソン Su 分布はマイナスの歪みに対応して実現値を捉えている。

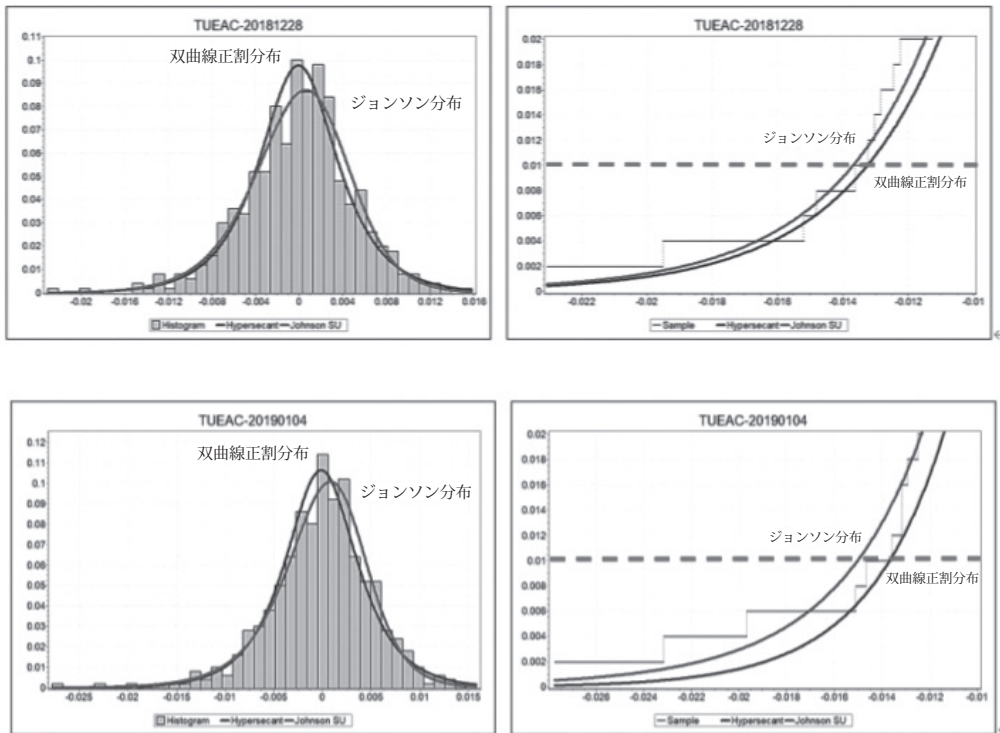
図表 10 前日からの変化 (12/21 と 12/25)



出所：筆者作成

まとめると、図表8と図表9についてはマイナス変動が抜けることが原因で大きく変動したケースであり、変動の瞬間は予測値が実現値を捉えられないこともある。たとえ実現値を捉えることができなくても実現値との乖離はさほど大きくないことが見てとれる。しかしながら、図表10と11については、マイナス変動そのものは小さくなくても、マイナス変動2回発生しているケースである。本研究の評価期間では唯一リスク量が増加するタイミングとなっており、マイナスの歪みが現れるがジョンソン Su 分布はその歪みに対応できていることがわかった。

図表 11 前日からの変化 (12/28 と 1/4)



出所：筆者作成

3-4 バックテストの結果

分析の最後にバックテストを実施し、バックテストの結果を図表12に示した。超過回数が最も少ないのはジョンソン Su 分布の3回、2番目に少ないのは双曲線正割分布、ラプラス分布、

平常時におけるジョンソン Su 分布を仮定した
VaR 推定の有効性評価*

ヒストリカル法およびブートストラップ法の4回となった。ジョンソン Su 分布が超過回数が1回少ないのは2019年3月22日の予測値-1.487に対して、実現値-1.425%と捉えることができたことである。結論としては、ジョンソン Su 分布をはじめ、双曲線正割分布、ラプラス分布、ヒストリカル法およびブートストラップ法のモデルは有効であると判断できる。特にジョンソン Su 分布は超過回数3回と最も少なく、5つのモデルの中でも一番有効であると判断した。

評価期間内の実現値を小さい方から並べて、最小の3つの実現値はすべての確率分布および各手法で実現値を捉えることはできなかった。12月28日の-2.773%、12月21日の-2.305%、10月10日の-1.463%の3つの実現値では予測値が実現値を捉えていない。

図表 12 バックテスト結果

ポートフォリオ TUEAC	
分布	超過回数
正規分布	7
ロジスティック分布	6
双曲線正割分布	4
ラプラス分布	4
ジョンソン SU 分布	3
ヒストリカル	4
ブートストラップ	4

出所：筆者作成

4 おわりに

本研究では、平常時に対応できるリスクモデルとして、ジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定が最も有効であると判断した。

ここでジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定の特徴を挙げておく。第一に、実現した観測分布の特徴を反映させた連続分布を仮定している。第二に、観測分布の歪度・尖度の変動にほぼ対応できる。第三に、ジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定の推定レベルが他のモデルによる推定レベルと一致する期間が長い。第四に、ジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定は多くの期間において実現値を捉えることができる。

正規分布・ロジスティック分布・双曲線正割分布・ラプラス分布は対称分布であり、2つのパラメータによってその形状が決まる確率分布である。一方、ジョンソン Su 分布は4つのパラメータによってその形状が決まる確率分布である。したがってジョンソン Su 分布による予測の方が現実の観測分布に近似することが予想できる。

3-3 適合度の分析結果で示した図表6 評価期間の適合回数と図表7 ジョンソン Su 分布の捕捉率の分析を再度述べる。まず図表6 では観測分布全体の38%でジョンソン Su 分布が適合する結果となった。ただしアンダーソン・ダーリング検定は分布全体を見ており、観測分布の左裾の適合の程度を測っているわけではない。一方、図表7で「捕捉率」は観測分布の左裾の適合の程度を測っていることになり、この割合が84.0%を占めることがわかった。しかもジョンソン Su 分布による推定値が観測分布を捉えていない期間は4月中旬、7月初旬、11月中旬から12月中旬となっており、いずれもマイナス変動が観測期間から抜けたあとの期間であり、7月初旬、11月中旬から12月中旬では尖度が小さい時期⁸が含まれている。つまり観測分布の形状が尖りの小さい平らな状態では左裾を捉えきれないことが考えられる。

また、3-1 Value-at-Risk 推定の計算結果において示した図表3 Value-at-Risk 推定結果にも注目した。2018年7月初旬の大きなマイナス変動が抜けたあと、12月下旬の2回のマイナス変動の発生した時期までの間、ジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定と双曲線正割分布を仮定した Value at Risk 推定およびブートストラップ法による Value at Risk 推定のレベルが近似した。この時期は「平常時」と判断できる時期であり、特に2つの確率分布を仮定した Value at Risk 推定では、歪度・尖度の影響が小さいことがわかる。

以上により、最初に述べたジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定の4つの特徴を根拠として、平常時に対応できるリスクモデルとして、ジョンソン Su 分布を仮定した Value at Risk 推定が最も有効であることを提言する。

8 2018年11月20日から12月21日（尖度：0.75程度）。

Appendix A 確率分布

各対称分布のパラメータについてはモーメント法により、ジョーンソン Su 分布のパラメータについては最尤法により推定している。なお、蓑谷 [2010] と四辻 [2010] を参照している。

ロジスティック分布 累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \mu + \theta \ln \left(\frac{u}{1-u} \right)$

双曲線正割分布 累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \mu + \frac{2\theta}{\pi} \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} u \right) \right)$

ラプラス分布 累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \begin{cases} \mu + \theta \ln 2u \\ \mu - \theta \ln 2(1-u) \end{cases}$

ジョーンソン Su 分布 累積分布関数の逆関数： $F^{-1}(u) = \lambda \sinh \left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \gamma}{\delta} \right) + \xi$

ジョーンソンシステムは、確率変数 X を定数 a, β, γ, δ と滑らかな関数 $h(y)$ により変換した $Z = \gamma + \delta h \left(\frac{X-a}{\beta} \right)$ が標準正規分布に従うときの X が属する分布系である。

X がジョーンソン Su 分布に従うとする。 $Y = \frac{X-a}{\beta}$ および $\omega = \exp \left(\frac{1}{\delta^2} \right)$, $\Omega = \frac{\gamma}{\delta}$ とおくと

Y の平均回りの 4 次までのモーメントは

$$E[Y] = -\omega^{1/2} \sinh \Omega$$

$$V[Y] = \frac{1}{2} (\omega - 1) (\omega \cosh 2\Omega + 1)$$

$$\mu_3[Y] = -\frac{1}{4} \omega^{1/2} (\omega - 1)^2 \{ \omega (\omega + 2) \sinh 3\Omega + 3 \sinh \Omega \}$$

$$\mu_4[Y] = \frac{1}{8} (\omega - 1)^2 \{ \omega^2 (\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3) \cosh 4\Omega + 4\omega^2 (\omega + 2) \cosh 2\Omega + 3(2\omega + 1) \}$$

となる。

※中川『正規性の検定』, pp.64-66 を参照。

Appendix B アンダーソン・ダーリング検定 (適合度検定)

アンダーソン・ダーリング検定の検定統計量 A^2 を示す。

$$AD \text{ 統計量 } A^2 = - \sum_{i=1}^n \left[(2i-1) \frac{\log p_i + \log (1-p_{n+1-i})}{n} \right] - n$$

$$\text{修正統計量 } A^* = A^2 \left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

$$Z_{(i)} = \frac{X_i - \bar{X}}{s}, p_i = \Phi(Z_{(i)}) = \int_{-\infty}^{Z_{(i)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, i=1, 2, \dots, n$$

仮定する分布が現実の観測分布に適合すればするほど、AD 統計量は小さくなる。すなわち AD 統計量は 0 に近づく。

※修正統計量の右辺のうち、 $\left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right)$ は統計量の右辺において log を取ったものを元に戻すための近似計算式である。

※ Anderson and Darling “A Test of Goodness of Fit” pp.765-769 を参照。

Appendix C ブートストラップ法

過去データから得られる経験分布を仮に真の分布とみなし、過去データを母集団とみなす。乱数を用いて重複を許す形でこの母集団から標本を取り出すことで、何組もの標本を得ることができる。それらから得られる各々の分位点の平均をとることができる。この分位点の平均と現データから得られる推定量との差は偏りに関する推定値と考えられる。これがブートストラップ法の基本的な考え方である。

Appendix D バックテスト

図表 13 超過回数に該当する累積確率

	超過回数	スケーリング・ファクターの増分（プラス・ファクター）	累積確率
グリーン・ゾーン	0	0.00	8.11%
	1	0.00	28.58%
	2	0.00	54.32%
	3	0.00	75.81%
	4	0.00	89.22%
イエロー・ゾーン	5	0.40	95.88%
	6	0.50	98.63%
	7	0.65	99.60%
	8	0.75	99.89%
	9	0.85	99.97%
レッド・ゾーン	10 以上	1.00	99.99%

出所：マーケット・リスクに対する所要自己資本額算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテストングを利用するための監督上のフレームワーク（日本銀行仮訳）

累積確率とは、実際の信頼水準が 99% である場合に 250 個の観測データにおいて、超過回数が一定水準以下となる確率をいう。たとえば、超過回数 4 回に対応する累積確率は、超過回数が 0 回から 4 回までとなる確率である。

参考文献

- 磯貝孝 [2013] 「切断安定分布による資産収益率のファットテイル性のモデル化と VaR・ES の計測手法におけるモデル・リスクの数値的分析」, 日本銀行ワーキングペーパー No.13-J-3.
- 磯貝孝 [2014] 「切断安定分布を用いた VaR・ES の計算精度に関する数値的分析」, JAFEE ジャーナル・金融工学と市場計量分析:「リスクマネジメント」, pp.121-171, 朝倉書店.
- 久保田幸長 [2009] 「市場 VaR 計測の問題点とパラメトリック法による改善」, IMES Discussion Paper Series, 2009-J-27.
- 中川重和 [2019] 『正規性の検定』, 共立出版.
- 蓑谷千風彦 [2010] 『統計分布ハンドブック』, 朝倉書店.
- 四辻哲章 [2010] 『計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法』, プレアデス出版.
- 汪金芳・田栗正章 [2003] 「ブートストラップ入門」, 『計算統計 I』, 岩波書店, pp.1-64.
- Anderson, T. W. and Darling, D. A. [1954] “A Test of Goodness of Fit”, Journal of the American Statistical Association, 49 (268), pp.765-769.
- Basel Committee on Banking Supervision [1996b] Supervisory framework for the use of “Backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirement, Basel Committee on Banking Supervision.
- Miura, R. and Oue, S. [2000] “Statistical Methodologies for the Market Risk Measurement”, *Asia-Pacific Financial Markets*, 7(4), pp.305-319.

Abstract

This study takes up the Parametric Method and the Historical Method in the Value-at-Risk Estimation Method and makes a comparative analysis. In particular, we pay attention to the Value-at-Risk Estimation assuming the Johnson Su distribution with a large number of parameters. As a result of the analysis, we were able to confirm the effectiveness of the Value-at-Risk Estimation assuming the Johnson Su distribution in multiple items including the Backtesting.