高所得老年者が負担する年金モデル*

谷　川　琴　乃
坂　上　智　哉

要　旨

本研究では、年金負担の世代間格差を是正するために、若年世代だけでなく、高い資産所得を得ている老年世代も賦課方式年金の保険料を負担する年金政策を提案する。この年金政策が資本ストックと効用に与える影響を分析するために、若年期に高所得者と低所得者が存在する世代重複モデルを構築する。その結果、安定的な定常状態の資本ストック水準は、老年世代が保険料を負担すればするほど大きくなることを明らかにする。また、シミュレーション分析によって、高所得者と低所得者の間で合意可能な負担水準が存在することを明らかにする。

キーワード：賦課方式年金、世代間格差、世代重複モデル
JEL Classifications：H55, O41

* 本研究は JSPS 科研費 20K01648の助成を受けたものです。

1. はじめに

日本の社会保障制度には様々な問題が指摘されているが、その中でも賦課方式年金制度が抱える問題として少子高齢化の進展に伴う世代間格差と年金制度の持続可能性の問題があげられる。ここでの世代間格差の問題とは、少子高齢化が進むことで、若年世代の1人当たり年金負担が増加してしまうという問題である。

そこで本研究では賦課方式年金制度のもと、年金負担の世代間格差を是正し、年金制度が長期的に持続可能となる新しい年金政策を提案する。具体的には、若年世代に加えて、高い資産所得を得ている老年世代も保険料を負担するというものである。資産を保有する老年世代が利子所得の範囲内で保険料を負担することで若年世代の負担が減り、世代間格差は縮小する。さらに、この仕組みのもとで動学的に実行可能領域内の定常状態に経済が収束すれば、この年金制度は持続可能であることにもなる。

そこで本論文では、この政策が資本ストックに与える影響を明らかにする。そのために、若年期に高所得者と低所得者が存在する世代重複モデル (Over-Lapping Generations model：以下 OLG モデルと呼ぶ) を構築する。モデルでは若年期に高所得者であった者は、老年期には高い資産所得を得ることになる。このモデルを用いて、当該年金政策の導入が資本ストックの動学的挙動と定常状態に与える影響を分析する。その結果、年金負担の世代間格差を是正することで、つまり、高い資産所得を得ている老年世代の保険料を高くすることで、安定的な性質を持つ定常状態の資本ストック水準はより大きくなることを明らかにする。

さらに、定常状態のシミュレーション分析を行うことで、高所得者の生涯効用を最大にする老年世代の保険料が存在する場合があることを明らかにする。この保険料水準は高所得者と低所得者の間で合意可能な保険料であることも確認する。

ところで、年金制度が資本ストックの動学的挙動に与える影響を分析する標準的なモデルは、資本蓄積を OLG モデルに組み込んだ Diamond (1965) に基づいている。このモデルの特性についての研究とその拡張については、2000年代以降に限っても de la Croix and Michel (2002), Acemoglu (2009), 二神 (2012), Yakita (2017) など、非常に多くの文献で論じられている。これらのモデルでは、若年世代と老年世代の2世代からなる経済を想定し、賦課方式年金制度のもとでの経済の動学分析が行われている。また、これらの研究では賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害することを指摘している。

賦課方式年金制度の持続可能性に関しては、少子高齢化との関係で多くの研究論文がある。Cigno (1993) では、少子化で賦課方式年金の持続可能性が弱められることを明らかにしている。Fanti and Gori (2012) では、ある条件のもとで出生率の低下が年金の受給額を増やす可能性を理論的に示している。Cipriani (2014) では、人口高齢化に伴い、一人当たり年金額が減少することを理論的に示している。これに対して本論文では、人口が一定の状況で高所得老年者を公的年金の支え手に加えても、安定的な定常状態が存在する、すなわち、公的年金制度が持続可能

となることを明らかにする。この帰結は少子高齢化が進む社会では一層頑強性を高めることが予想される。なぜならば、少子高齢化によって支え手に回る高齢者が増加するためである。

ところで、賦課方式年金制度を扱ったモデルの多くは同一世代内での同質的な個人が想定されているため、そこに高所得家計や低所得家計といった所得の異質性は仮定されていない。

これに対して、教育の所得への効果を論じる研究では、所得格差を扱った OLG モデルが数多く存在する。なかでも、Glomm and Ravikumar (1992), Dahan and Tsiddon (1998), Sakagami and Matsuo (2021) などでは、教育制度と所得格差に注目した研究が行われている。その中で用いられるモデルは、教育の選択を行う若年世代と、生産活動を行う壮年世代からなる 2 世代 OLG モデルである。特に、Sakagami and Matsuo (2021) では、高所得家計と低所得家計が登場し、若年期に教育を選択した者は一定の確率のもと次期に高所得者となるという構造になっている。そのうえで、各家計が教育費を負担する私教育制度と、政府が税収で教育費を負担する公教育制度の効果を分析している。また、Kamiguchi (2021) では、教育を組み込んだ OLG モデルにおいて、人口高齢化が年金の受給額と社会厚生を高める場合があることを示している。

本研究では、高所得の老年者にも年金の保険料を拠出してもらうために、このような所得格差を賦課方式年金モデルに組み込むことにする。モデルでは、若年期の高所得家計と低所得家計の存在を外生的に与えることで、内生的に決まる貯蓄に違いが生じ、若年期に高所得であった家計は老年期に高い資産所得を得ることになる。そのような老年世代が、同じ期の若年世代とともに保険料を支払い、年金制度を支える状況を想定する。

モデル分析では資本ストックの動学的な挙動と、安定的な定常状態の存在を確認する。その結果、安定的な定常状態における資本ストックの水準は、老年者が保険料を負担しない現行の賦課方式よりも大きくなることを明らかにする。高所得老年者も年金の保険料を負担する場合、高所得者は将来の保険料に備えて若年期に貯蓄を増やす。その結果、資本ストックも増加するのである。この帰結は、賦課方式年金制度が資本蓄積を阻害するという従来の帰結を修正するものである。

このモデルでは、定常状態の資本ストックの水準を数学的に求めることが難しい。そのため、資本ストックの水準に対応して決定される消費や、若年期の消費と老年期の消費から得られる生涯効用についてはシミュレーション分析で解明する。ここで、高所得老年者が年金の保険料を負担することは、老年者から若年者へのトランスファーを通じた年金負担の平準化効果だけでなく、高所得老年者から低所得老年者への「世代内の」トランスファーにより、低所得者の生涯効用を押し上げる効果も持つ。このため、高所得老年者の保険料を高めると、低所得者の生涯効用は上昇し続けることになる。一方、高所得者の生涯効用は、保険料の増加との関係で単調に減少するわけではないことも明らかになる。特に、保険料が小さな領域では逆に高所得者の生涯効用も増加する。なぜならば、高所得老年者が保険料を負担することで、高所得の若年世代は保険料負担が減少し、消費が増加する。一方で、高所得の老年世代は保険料を負担する

ため、消費は減少する。このとき、高所得老年者の保険料負担が小さい領域では、若年世代の消費の増加が老年世代の消費の減少を上回るため高所得者の生涯効用も増加するのである。

本論文の構成は次の通りである。まず第2節では若年世代に加え高所得の老年者も賦課方式年金の保険料を負担するような2世代重複モデルを構築し、高所得者、低所得者それぞれの最適な貯蓄関数を導出する。第3節では企業の利潤最大化行動を定式化する。第4節で資本ストックの動学式から定常状態を求め、老年者が新たに保険料を負担することが定常状態にどのような影響を与えるのかを分析する。第5節ではシミュレーション分析を行う。最後に第6節で、まとめを述べる。

2. モデル

本論文では各期に若年者と老年者が存在する世代重複モデルを構築する。さらに、若年期に高所得者と低所得者の存在を仮定する（図1参照）。t 期に誕生した世代を t 世代と呼ぶと、t 世代の生涯の予算制約は、高所得者と低所得者とにわけて考える必要がある。

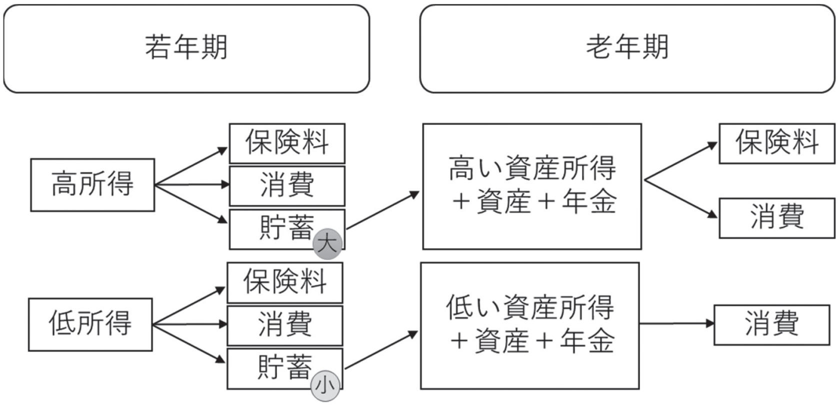

図1：各期における家計の収支

まず、高所得者の予算制約式から考えてみる。彼らは若年期に高い賃金を得て、それを消費、貯蓄、年金保険料の支払いにあてる。このモデルでは、若年世代だけですべての保険料を拠出するのではなく、その期に高い資産所得を得ている老年者も保険料の支払いを行うものとする。つまり、t 期において支払う保険料は、その期の若年世代である t 世代の全員と、老年世代である t-1世代の一部が支払うことになる。

t 世代が老年期となる t+1期では、若年期に高所得者であった老年者は大きな資産所得を得る（詳しくは後述する）。彼らは資産所得と年金をすべて消費と保険料の支払いにあてる。支払われた保険料はすべて老年世代に年金として再分配される。

t 世代の高所得者の予算制約を若年期（t 期）と老年期（t+1期）で表現すると、それぞれ次の(1), (2)のようになる。

$$c_t^{yh} + s_t^h + \left(d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o\right) = w_t^h \tag{1}$$

$$c_{t+1}^{oh} + d^o = (1 + r_{t+1}) s_t^h + \frac{\left(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y\right)\left(d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o\right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o} \tag{2}$$

ここで、(1)の c_t^{yh} は t 期の若年者（young）で高所得者（タイプ h）の消費、s_t^h は t 期の若年者で高所得者の貯蓄である。d と d^o は政府が設定する正の定数である。d は、「もし若年者だけが保険料を負担するとした場合」の若年者の１人当たりの保険料であり、d^o は若年期に高所得を得ていた老年者が支払う１人当たりの保険料である。H_t^o は t 期の老年者（old）で高い資産所得を得ている者の人口、H_t^y は t 期の若年者で高所得者の人口、L_t^y は t 期の低所得の若年者の人口、w_t^h は t 期に高所得を得ている若年者の所得（賃金）である。(1)の左辺第３項は、高所得老年者も年金の保険料を負担する場合の、t 期の若年世代の１人当たり保険料の支払額である。なぜならば、t 期の老年者の保険料支払い $H_t^o d^o$ を t 期の若年期全体の人口 $H_t^y + L_t^y$ で割った額、すなわち t 期の若年者の間で均等に再分配した額が $\frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o$ となるからである。この額を d から引いた値が、本モデルでの若年者の保険料の支払額になる。

(2)の c_{t+1}^{oh} は t+1期の老年者（old）で高所得者（タイプ h）の消費、r_{t+1} は t+1期の利子率、H_{t+1}^y は t+1期の高所得の若年者人口、L_{t+1}^y は t+1期の低所得の若年者人口、H_{t+1}^o は若年期に高所得だった t+1期の老年者の人口である。(2)の右辺第２項は高所得老年者が受け取る年金額を表している。その分子部分は若年世代が１人当たりで支払う年金保険料に若年人口を乗じた額 $\left(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y\right)\left(d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o\right)$ と、t+1期の高所得の老年者が支払う保険料の総額 $H_{t+1}^o\ d^o$ を合計した値である。この拠出額を t+1期の老年者人口 $H_{t+1}^o + L_{t+1}^o$ で割り、老年者１人当たりの年金受取額を求めている。

次に、若年期の低所得者が支払う保険料は若年期の高所得者の保険料と同一であると仮定する。また、低所得の老年者は保険料の支払いを行わないと仮定する。このとき、低所得者の予算制約を若年期と老年期で表現すると、それぞれ (3), (4)のようになる。

$$c_t^{yl} + s_t^l + \left(d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \right) = w_t^l \tag{3}$$

$$c_{t+1}^{ol} = (1 + r_{t+1}) s_t^l + \frac{(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y)\left(d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o} \tag{4}$$

ここで、(3) の c_t^{yl} は t 期の若年者 (young) で低所得者 (タイプ l) の消費、s_t^l は t 期の若年者で低所得者の貯蓄、w_t^l は t 期の低所得者の所得である。(3) 式左辺第 3 項にある保険料は (1) と同じである。これに対して、(4) 式左辺の c_{t+1}^{ol} は $t+1$ 期の老年者 (old) で低所得者 (タイプ l) の消費である。(4) 式右辺第 2 項の年金の受取額は (2) と同じである。

以下では、$d - \frac{H_t^o}{H_t^y + L_t^y} d^o \leq \min\left(w_t^l,\ w_t^h\right)$ かつ $d^o \leq r_{t+1}\, s_t^h$ という制約を仮定する。これは年金の保険料が所得や利子所得を上回らないことを意味している。また、以降の分析では各世代の人口を 1 に基準化し、人口は成長しないものと仮定する。したがって、各期の若年者と老年者を合わせた総人口は常に2となる。さらに、低所得者と高所得者の人口 (したがって人口比) も一定であると仮定する。すなわち、

$H_t^y = H_{t+1}^y = H_t^o = H_{t+1}^o = H\ (const.),\ L_t^y = L_{t+1}^y = L_t^o = L_{t+1}^o = L\ (const.).$

以下の議論では、$H < L$ を仮定する。また、世代人口に占める高所得者の比率を $\frac{H}{H+L} = v$ と置くと、$\frac{L}{H+L} = 1 - v$ であることがわかる。

この仮定のもとでは、老年者が受け取る年金額は d となる。なぜならば、(2) と (4) の右辺第 2 項に出てくる老年者が受け取る年金額は、$H_{t+1}^y + L_{t+1}^y = H_{t+1}^o + L_{t+1}^o = 1$ なので、

$\forall t \geq 0,\ \frac{(H_{t+1}^y + L_{t+1}^y)\left(d - \frac{H_{t+1}^o}{H_{t+1}^y + L_{t+1}^y} d^o \right) + H_{t+1}^o d^o}{H_{t+1}^o + L_{t+1}^o} = d$ となる。

以上の点に注意すれば、(1)～(4) の予算制約式は次のように書き換えることができる。

$$c_t^{yh} + s_t^h + (d - v d^o) = w_t^h, \tag{5}$$

$$c_{t+1}^{oh} + d^o = (1 + r_{t+1}) s_t^h + d, \tag{6}$$

$$c_t^{yl} + s_t^l + (d - v d^o) = w_t^l, \tag{7}$$

$$c_{t+1}^{ol} = (1 + r_{t+1}) s_t^l + d. \tag{8}$$

個人は次のような対数効用関数のもとで、自らの消費から得る効用を最大化するように行動する。

$$\max_{c_t^{yh},c_{t+1}^{oh}} U(c_t^{yh})+\frac{1}{1+\rho}U\left(c_{t+1}^{oh}\right)\equiv \ln c_t^{yh}+\frac{1}{1+\rho}\ln c_{t+1}^{oh}, \tag{9}$$

$$\max_{c_t^{yl},c_{t+1}^{ol}} U(c_t^{yl})+\frac{1}{1+\rho}U\left(c_{t+1}^{ol}\right)\equiv \ln c_t^{yl}+\frac{1}{1+\rho}\ln c_{t+1}^{ol}\ . \tag{10}$$

(9) と (10) は、それぞれ高所得者と低所得者の目的関数であり、$\frac{1}{1+\rho}$ は主観割引率（ρ >0）である。(9) に (5) と (6) を、(10) に (7) と (8) をそれぞれ代入すると

$$\max_{s_t^h} \ln[w_t^h-s_t^h-(d-vd^o)]+\frac{1}{1+\rho}\ln[(1+r_{t+1})s_t^h+d-d^o], \tag{11}$$

$$\max_{s_t^l} \ln[w_t^l-s_t^l-(d-vd^o)]+\frac{1}{1+\rho}\ln[(1+r_{t+1})s_t^l+d], \tag{12}$$

となる。(11), (12) についてそれぞれ最大化条件を導き、それを s_t^h, s_t^l について整理することで家計の最適な貯蓄関数を得る。まず、高所得者の貯蓄関数を導出する。(11) の一階条件は

$$\frac{-1}{w_t^h-s_t^h-(d-vd^o)}+\frac{1}{1+\rho}\frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})s_t^h+d-d^o}=0$$

である。これを s_t^h について整理することで、次のような高所得者の貯蓄関数を得る。

$$s_t^h=\frac{w_t^h-(d-vd^o)}{2+\rho}-\frac{(1+\rho)(d-d^o)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \tag{13}$$

低所得者の貯蓄関数については、(12) の一階条件は

$$\frac{-1}{w_t^l-s_t^l-(d-vd^o)}+\frac{1}{1+\rho}\frac{1+r_{t+1}}{(1+r_{t+1})s_t^l+d}=0$$

である。これを s_t^l について整理すると、次のような低所得者の貯蓄関数を得る。

$$s_t^l=\frac{w_t^l-(d-vd^o)}{2+\rho}-\frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}. \tag{14}$$

3. 企業行動

次に企業行動について述べる。代表的企業を想定し、生産関数は次のようなコブ = ダグラス型を仮定する。

$$Y_t = F(K_t, H, L) \equiv \mathrm{A}K_t^{\alpha} H^{\beta} L^{\gamma}. \tag{15}$$

ここで、K_t は t 期の資本ストックを表す。また、$\alpha + \beta + \gamma = 1$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$ である。さらに、以下の議論では $\beta > \gamma$ を仮定する。

完全競争市場を仮定すれば、企業はプライステイカ―として利潤最大化行動をとる。すなわち企業行動は次のように定式化される。

$$\max_{K_t, H, L} F(K_t, H, L) - r_t K_t - w_t^h H - w_t^l L$$

この一階条件は次のようになる。

$$r_t = F_K(K_t, H, L) = \alpha A K_t^{\alpha-1} H^{\beta} L^{\gamma} \tag{16}$$

$$w_t^h = F_H(K_t, H, L) = \beta A K_t^{\alpha} H^{\beta-1} L^{\gamma} \tag{17}$$

$$w_t^l = F_L(K_t, H, L) = \gamma A K_t^{\alpha} H^{\beta} L^{\gamma-1} \tag{18}$$

また、生産関数は一次同次を満たすため、次のような完全分配が成立する。

$$Y_t = r_t K_t + w_t^h H + w_t^l L \tag{19}$$

このとき、(17) と (18) より、

$$\frac{w_t^h}{w_t^l} = \frac{\beta \mathrm{A} K_t^{\alpha} H^{\beta-1} L^{\gamma}}{\gamma \mathrm{A} K_t^{\alpha} H^{\beta} L^{\gamma-1}} = \frac{\beta}{\gamma}\frac{L}{H} > 1$$

であることがわかる。なぜならば、$H<L$ の仮定より $\frac{L}{H} > 1$ であり、$\beta > \gamma$ の仮定より $\frac{\beta}{\gamma} > 1$ となるためである。これよりただちに、$w_t^h > w_t^l$ を得る。また、貯蓄関数 (13), (14) のそれぞれの第 2 項に関して $\frac{(1+\rho)(\mathrm{d}-d^o)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})} < \frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}$ が成立しており、$w_t^h > w_t^l$ から第 1 項に関して $\frac{w_t^h-(d-vd^o)}{2+\rho} > \frac{w_t^l-(d-vd^o)}{2+\rho}$ である。よって、$s_t^h > s_t^l$ となることもわかる。

最後に、財市場と資金市場の均衡条件から、次のようになる。[1]

$$K_{t+1} = s_t^h H + s_t^l L. \tag{20}$$

4.　資本ストックの動学式と定常状態

本節では、資金市場均衡条件 (20) と貯蓄関数 (13), (14) を用いて、資本ストックの動学式を導出する。まず、世代人口 ($1=H+L$) で (20) を割り $\frac{K_{t+1}}{H+L} = k_{t+1}$ とおくと、

$$k_{t+1} = s_t^h v + s_t^l (1-v) \tag{21}$$

となる。これに貯蓄関数 (13), (14) を代入すると、

$$k_{t+1} = \left[\frac{w_t^h - d + vd^o}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)(d-d^o)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}\right] v + \left[\frac{w_t^l - (d - vd^o)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}\right](1-v)$$

となり、企業の利潤最大化条件 (16), (17), (18) を用いると

$$\begin{aligned} k_{t+1} = &\left[\frac{\beta A v^{\beta-1}(1-v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)(d-d^o)}{(2+\rho)(1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})}\right] v \\ &+ \left[\frac{\gamma A v^\beta (1-v)^{\gamma-1} k_t^\alpha - (d - vd^o)}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})}\right](1-v) \\ = &\frac{\beta A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)v}{2+\rho} - \frac{(1+\rho)(d-d^o)v}{(2+\rho)(1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})} \\ &+ \frac{\gamma A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)(1-v)}{2+\rho} - \frac{(1-v)(1+\rho)d}{(2+\rho)(1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1})}. \end{aligned}$$

両辺に 2+ ρ を乗じ、さらに変形し、整理すると資本ストックの動学式 (22) を得る。

$$\begin{aligned} (2+\rho)k_{t+1} = &\beta A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)v - \frac{(1+\rho)(d-d^o)v}{1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} \\ &+ \gamma A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha - (d - vd^o)(1-v) - \frac{(1-v)(1+\rho)d}{1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ d - vd^o + \frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha A v^\beta (1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}} + (2+\rho)k_{t+1} = (\beta+\gamma) A v^\beta (1-v)^\gamma k_t^\alpha. \tag{22}$$

1　(20) の導出は付録を参照。

(22) の左辺を k_{t+1} の関数として $\Phi(k_{t+1})$ で表し、右辺を k_t の関数として $\Psi(k_t)$ で表すと、動学式 (22) は次の式に対応することがわかる。

$$\Phi(k_{t+1}) = \Psi(k_t)$$

右辺の関数 $\Psi(k_t)$ は、原点を通り単調に増加する凹関数である (図 2)。

これに対して、左辺の関数 $\Phi(k_{t+1})$ の $d-vd^o$ は切片で、$(2+\rho)k_{t+1}$ は傾き $2+\rho$ の直線で表される。分数部分 $\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}}$ のグラフの形状を確認するために1階導関数と2階導関数を求めると、次のようになる。

$$\frac{d}{dk_{t+1}}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{-(1+\rho)(d-vd^o)(\alpha-1)\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1})^2},$$

$$\frac{d^2}{dk_{t+1}^2}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{1+\alpha})^4}.$$

ただし、

$$\Omega(k_{t+1}) = -(1+\rho)(d-vd^o)(1-\alpha)\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-3}\times \left(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}\right)\left(2-\alpha+\alpha^2 Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}\right).$$

分数部分 $\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}}$ の1階導関数と2階導関数を導出した結果、$d-vd^o$ の符号により、グラフの形状が異なることが確認できる。よって、以下の2パターンに場合わけをし、それぞれのグラフの形状を確認していく。

(ｉ) $d-vd^o \geq 0$ の場合

1階導関数

$$\frac{d}{dk_{t+1}}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{-(1+\rho)(d-vd^o)(\alpha-1)\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1})^2} \geq 0$$

2階導関数

$$\frac{d^2}{dk_{t+1}^2}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}} = \frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{1+\alpha})^4} \leq 0$$

$$\Omega(k_{t+1}) = -(1+\rho)(d-vd^o)(1-\alpha)\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-3}\left(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}\right)\left(2-\alpha+\alpha^2 Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}\right) \leq 0$$

1階導関数の符号は非負であり、2階導関数の符号は非正である。これにより $\Phi(k_{t+1})$ のグラフの形状が確定する。

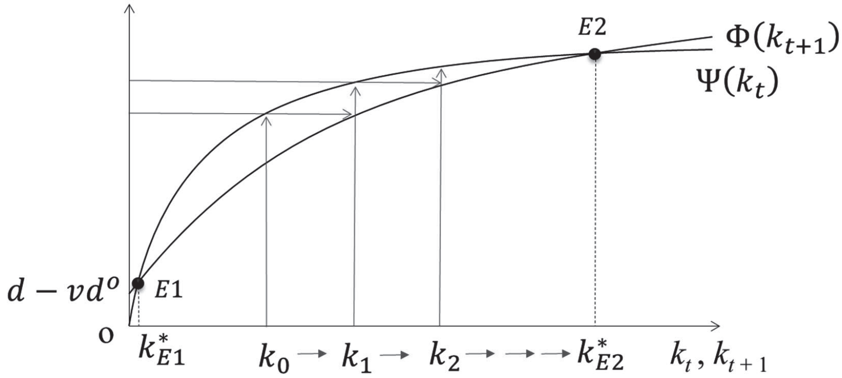

図 2：$d - vd^o \geq 0$のモデルの定常状態と移行過程

この図 2では本モデルの定常状態と移行過程を示している。定常状態は $\Phi(k_{t+1})$ と $\Psi(k_t)$ の交点に対応しており、図では2点(E1, E2)が存在するケースを描いている。それぞれの定常状態に対応する資本ストックは、k_{E1}^*と k_{E2}^*である。容易に確認できるように、k_{E1}^*は不安定な定常状態であり、k_{E2}^*は安定的な定常状態である。安定的な定常状態の資本ストックが大きいので、こちらを高位均衡と呼ぶ。

次に、高所得老年者が支払う保険料である d^o を政府が操作した場合の、高位均衡に与える影響を分析する。関数Φをパラメータ d^o で微分すれば、その符号は負となることがわかる。

$$\frac{d\Phi}{dd^o} = -v + \frac{-(1+\rho)v}{1 + \alpha A v^{\beta}(1-v)^{\gamma} k_{t+1}^{\alpha-1}} < 0$$

これは、d^o が増加する場合、関数Φのグラフは下方にシフトすることを意味している。

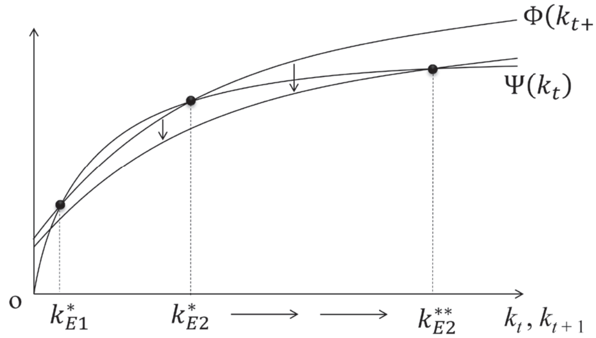

図3：d^o が増加した場合の高位均衡の変化

図3からわかるように、関数 Φ（k_{t+1}）のグラフが下方にシフトすることで安定的な定常状態 k_{E2}^{*}が右方向にシフトし、定常状態の資本ストックは増加する。逆に、高所得老年者の保険料が減少すれば、資本ストックは低下する。

本研究は高所得老年者に保険料負担を課すモデルではあるが、すべての保険料を若年世代が負担する場合も本モデルで説明が可能である。それは $d^o=0$のスペシャルケースに対応する。そして、$d^o=0$のケースで高位均衡が存在するとすれば、これまでの分析から、$d^o>0$のケースよりも資本ストックの水準は小さくなることがわかる。

では、高所得老年者の保険料 d^o が増加することで、なぜ定常状態の資本ストック水準が増加するのだろうか。その理由は次のように説明することができる。まず、高所得老年者が保険料を負担することにより、若年世代の保険負担 $d-vd^o$ が減少する。これは若年世代の可処分所得を増加させ、(13) と (14) より貯蓄水準を増加させる（つまり、$\frac{ds_t^h}{dd^o}>0, \frac{ds_t^l}{dd^o}>0$）。この貯蓄の増加が (21) の資金市場均衡式を通じて資本ストックの増加につながるのである。

以上の議論より、次の命題を得る。

【命題】若年世代に加え高所得老年者も賦課方式年金の保険料を負担することで、そうでない場合に比べて安定的な定常状態の資本ストック水準は増加する。

（ⅱ）$d-vd^o<0$ の場合

1階導関数

$$\frac{d}{dk_{t+1}}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1}}=\frac{-(1+\rho)(d-vd^o)(\alpha-1)\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-2}}{(1+\alpha Av^{\beta}(1-v)^{\gamma}k_{t+1}^{\alpha-1})^2}<0$$

2階導関数

$$\frac{d^2}{dk_{t+1}^2}\frac{(1+\rho)(d-vd^o)}{1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}}=\frac{\Omega(k_{t+1})}{(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{1+\alpha})^4}>0$$

$$\Omega(k_{t+1})=-(1+\rho)(d-vd^o)(1-\alpha)\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-3}\big(1+\alpha Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}\big)\big(2-\alpha+\alpha^2 Av^\beta(1-v)^\gamma k_{t+1}^{\alpha-1}\big)>0$$

1階導関数の符号は負であり、2階導関数の符号は正である。これにより、$\Phi(k_{t+1})$ のグラフの形が決まる。

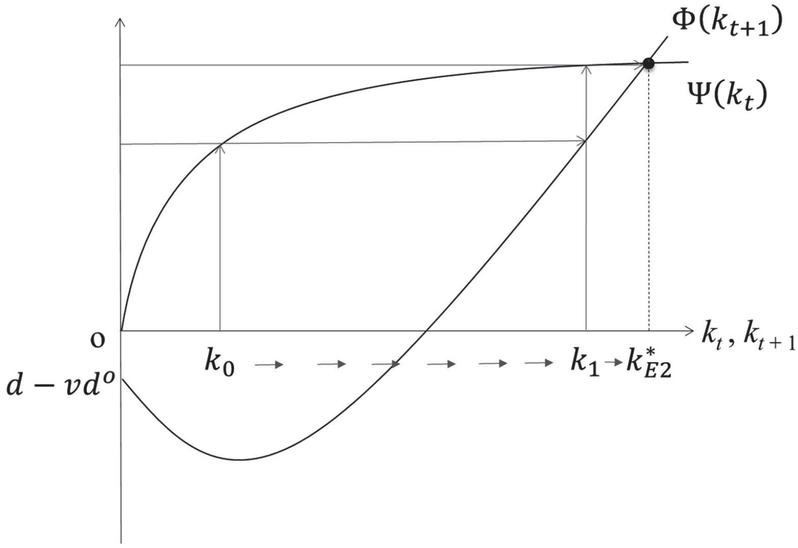

図4：$d-vd^o<0$ の定常状態と移行過程

図4は $d-vd^o<0$ の場合の定常状態と移行過程を示している。定常状態は $\Phi(k_{t+1})$ と $\Psi(k_t)$ の交点に相当する。図4の定常状態は一意に決定される。

5. シミュレーション分析

本節では、これまでの理論研究で明らかにすることができなかった点についてシミュレーション分析を行う。すなわち、(i) のケースのように高位均衡と低位均衡が存在するようなパラメータセットが存在するのか、である。特に、本節では、高所得老年者の保険料 d^o との関係で高位均衡と低位均衡の存在とその変化も確認する。さらに、高位均衡における高所得者と低所得者の生涯効用についてもシミュレーション分析を行う。

まず、外生パラメータの値を次のように設定する。

$\alpha=0.4,\quad \beta=0.4,\quad \gamma=0.2,\quad \rho=0.9,\quad A=10,\quad v=0.01,\quad d=0.2.$

これらの値の中で、$\alpha=0.4$としているが、このことは、$\beta+\gamma=0.6$ であることを意味する。この数値は実証的に推計されている労働分配率の値（0.57～0.65）と整合的である[2]。

時間選好率 ρ については、Momota and Horii (2013) など世代重複モデルの先行研究で主観割引率 $1/(1+\rho)$ が 0.5 程度で仮定されおり、$\rho=0.9$ はほぼその値に近い。A については実数解が出るように設定している。$v=0.01$ は、高所得者が世代の 1% である状況を想定している。d については、年金の保険料が所得や利子所得を上回らない範囲で設定している。

このもとで、d^o の値を増加させた場合の、内生変数の値を求めると、次のようになる。

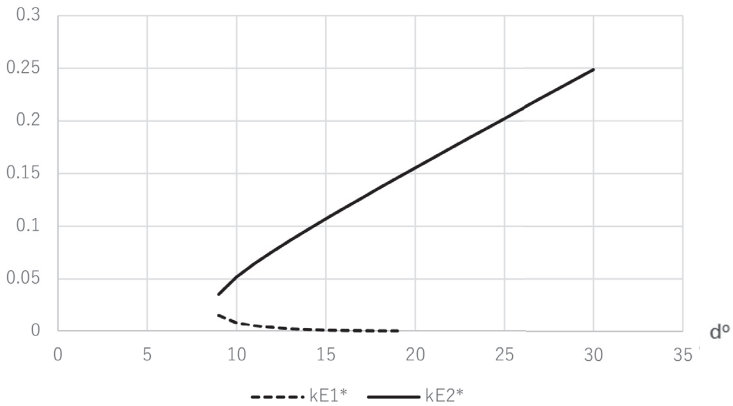

図 5：d^o と k^*_{E1}, k^*_{E2}

図 5 では、d^o と定常状態の資本ストックの関係を、$9\leq d^o\leq 30$ の範囲で求めている。ここでは高位均衡である k^*_{E2}に注目する。理論分析で論じたように、d^o を増加させると k^*_{E2}も増加することがこのシミュレーションにより明らかになった。逆に、低位均衡 k^*_{E1}は低下し、$20<d^o$ で消滅する。

また、(17), (18) からわかるように、高位均衡の資本ストックの増加に伴い、高所得者と低所得者の賃金も増加する。しかし、すでに確認したように、このモデルでは $\dfrac{w_t^h}{w_t^l}$ は一定であるので、賃金格差は変化しない。

次に、d^o の変化と高位均衡における生涯所得の関係を、高所得者と低所得者に分けてグラフにしたものが、それぞれ図 6 と図 7 である。

2 Karabarbounis and Neiman (2014) では、アメリカ、日本、ドイツなどの主要先進国では 0.57 から 0.65 の範囲にあるが、いずれも近年低下傾向にあることが指摘されている。

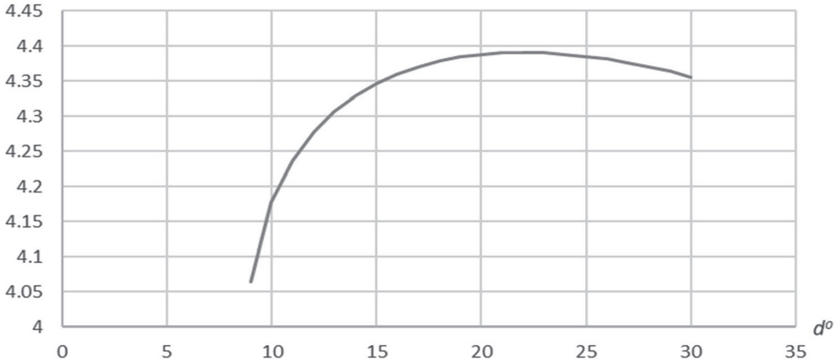

図 6：高所得者の生涯効用

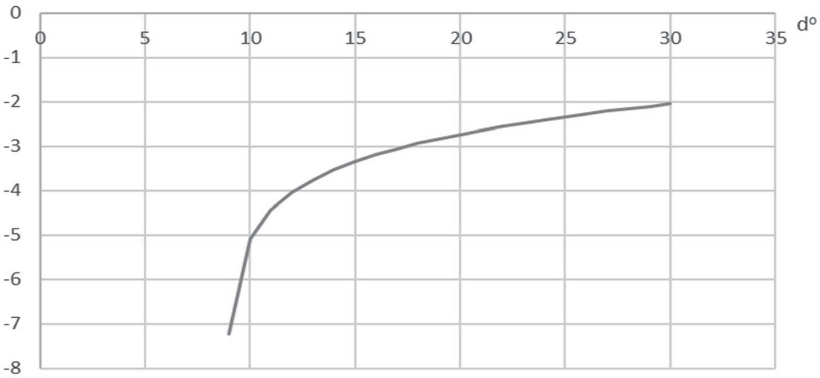

図 7：低所得者の生涯効用

図 6 より、高所得者の生涯効用を最大にする保険料が存在し、その値は $d^o=22$ である。これに対して、低所得者の生涯効用は d^o が増加するにしたがって増加しつづけることが図 7 より確認できる。低所得者は高所得老年者から所得移転を受けるため、生涯効用が増加することはわかりやすい。しかし、高所得老年者においても、生涯効用が増加する領域が生じる理由は何だろうか。それは次のように説明することができる。

	タイプ h	タイプ l
若年世代	c^{yh}	c^{yl}
老年世代	c^{oh}	c^{ol}

図8：各期における4タイプの人々の消費

このモデルでは各期に若年世代と老年世代が存在するが、さらに彼らはタイプ h とタイプ l に分けることができる。したがって、各期において常に4タイプの人々が存在する。その4タイプの人々の消費を表したものが図8である。まずタイプ l の人々は d^o の増加により所得移転を受けるため、若年世代、老年世代ともに、消費は増加する。次にタイプ h の人々では、d^o を増加させた場合、老年世代から若年世代への所得移転が行われるため、若年世代の消費は増加する。しかし、タイプ h の老年世代の消費は減少する。そのため、$d^o=22$ までは若年世代の消費の増加に伴う生涯効用の増加の寄与が老年世代の所得減少の寄与を上回り、それ以降では老年世代の消費の減少が上回るようになる。このため、高所得者の生涯効用は $d^o=22$ を頂点に上に凸のグラフになる。

高所得者の生涯効用を最大にする $d^o= d^*$ が存在する場合、社会的観点からこの保険料は合意可能となる。 d^o の水準を d^* よりも小さな水準から徐々に増加させる場合を考えてみよう。すると、低所得者の生涯効用は、増加するため、d^o を増加させることに賛成する。対して、高所得者は $d^o=d^*$ までは高所得者の生涯効用も増加しているため、d^o を増加させることに賛成する。しかし、$d^o=d^*$ を超えると、高所得者の生涯効用は減少するため、d^o を増加させることに反対する。よって、高所得者と低所得者の間での合意可能な保険料は $d^o= d^*$ のときである。

6. おわりに

本論文では、高所得者と低所得者が存在する2世代重複モデルに、高所得老年者も年金の保険料を一部負担する賦課方式年金制度を導入した。その結果、高所得老年者が保険料を負担することで安定的な定常状態の資本ストックは増加することを明らかにした。さらに、高所得の老年者の負担を高めれば高めるほど、定常状態の資本ストックは増加することも示すことができた。本論文では世代間格差を是正するために、高所得老年者が公的年金の支え手に加わる仕組みを導入したが、これにより経済はより望ましい状況で持続可能となる。さらに、この年金制度を導入していない現行方式と比較して、定常状態での高所得者と低所得者の双方の効用水

準はともに増加することも明らかにした。さらに、高所得者と低所得者の双方が合意可能な、高所得老年者の保険料水準が存在することも、シミュレーション分析で明らかにした。

最後に、今後の課題を述べる。本研究で提案したモデルでは人口成長率を考慮せず、若年者の負担を減らす方策を考えたが、賦課方式年金制度における世代間格差と年金制度の持続可能性の問題は人口減少社会において顕著となる。しかしこのモデルに人口成長（特にマイナス成長）を入れても結論が変わるとは考えられない。むしろ人口成長率を入れることによりこの主張がより一層明確になると考えられる。その理由は、人口成長率を入れ、人口減少社会を考える場合に高所得老年者の人口が相対的に高まることによって、より一層保険料を老年者からとりやすくなると考えられるためである。とはいえ、人口減少社会においてこの推論が妥当するのかは、本モデルを拡張し、検証する必要がある。

参考文献

[1] Acemoglu, D. (2009) "Growth with Overrlapping Generations," in *Introduction to Modern Economic Growth,* Princeton University Press.

[2] Akira Kamiguchi (2021), "Human capital, population aging, and PAYG pensions in the OLG model", 2021年度日本応用経済学会秋季大会報告論文.

[3] Akira Momota and Ryo Horii (2013), "Timing of childbirth, capital accumulation, and economic welfare", *Oxford Economic Papers,* 65 (2), 494-522.

[4] Alessandro Cigno (1993), "Intergenerational transfers without altruism：Family, market and state". *European Journal of Political Economy* 9 (4), 505-518.

[5] Dahan, M. and D. Tsiddon, (1998) "Demographic Transition, Income Distribution, and Economic Growth", *Journal of Economic Growth* 3, 29-52.

[6] de la Croix, D. and P. Michel, (2002) *A Theory of Economic Growth：Dynamics and Policy in Overlapping Generations,* Cambridge University Press.

[7] Diamond, P. (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review,* 55 (5)：1126–50.

[8] Giam Pietro Cipriani (2014), "Population aging and PAYG pensions in the OLG model", *Journal of Population Economics* 27 (1), 251-256.

[9] Glomm, G. and B. Ravikumar, (1992) "Public versus private investment in human capital：endogenous growth and income inequality", *Journal of Political Economy* 100, 818-834.

[10] Karabarbounis, L and B. Neiman (2014) "The Global Decline of the Labor Share," *The Quarterly Journal of Economics* 129, 61-103.

[11] Luciano Fanti and Luca Gori (2012), "Fertility and PAYG pensions in the overlapping generations model", *Journal of Population Economics* 25 (3), 955-961.

[12] Sakagami, T and M. Matsuo (2021) "Uncertainty of Educational Outcome, Demographic Transition and Income Distribution," *Globalization, Population, and Regional Growth in the Knowledge-Based Economy,* Springer, 111-113.

[13] Yakita, A. (2017) *Population Aging, Fertility and Social Security,* Springer.

[14] 二神孝一 (2012)『動学マクロ経済学—成長理論の発展』、日本評論社.

付録：(20) の導出

この付録では、二神 (2012) の第3章「世代重複モデル」の議論を本モデルに当てはめ、資金市場均衡条件の (20) を導出する。第 t 期には若年期の t 世代と老年期の t-1 世代が共存しており、この2つの世代の各個人が消費をおこなう。ここでは老年期 (o) と若年期 (y) の区別をつけるため人口 H, L に添え字をつける。このとき、財市場均衡条件は次のようになる。

$$Y_t = c_t^{yh}H^y + c_t^{oh}H^o + c_t^{yl}L^y + c_t^{ol}L^o + I_t. \tag{A.1}$$

I_t は t 期の粗投資額を表す。資本減耗率を0とすると $I_t = K_{t+1} - K_t$ となるので、(A.1) 式は次のように書き換えることができる。[3]

$$Y_t = c_t^{yh}H^y + c_t^{oh}H^o + c_t^{yl}L^y + c_t^{ol}L^o + (K_{t+1} - K_t) \tag{A.2}$$

(19), (A.2) より

$$\begin{aligned} r_tK_t + w_t^hH^y + w_t^lL^y \\ = c_t^{yh}H^y + c_t^{oh}H^o + c_t^{yl}L^y + c_t^{ol}L^o + (K_{t+1} - K_t) \end{aligned} \tag{A.3}$$

これを K_{t+1} について整理すると

$$K_{t+1} = \left(w_t^h - c_t^{yh}\right)H^y + \left(w_t^l - c_t^{yl}\right)L^y + (1 + r_t)K_t - c_t^{oh}H^o - c_t^{ol}L^o \tag{A.4}$$

を得る。(A.4) に個人の予算制約式 (5), (6), (7), (8) を代入し整理することで、次式を得る。

$$\begin{aligned} K_{t+1} = s_t^hH^y + s_t^lL^y + (1 + r_t)K_t - (1 + r_t)s_{t-1}^hH^o - (1 + r_t)s_{t-1}^lL^o \\ + (d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - (d - d^o)H^o - dL^o \end{aligned} \tag{A.5}$$

ここで、(A.5) 右辺の後半に出てくる $(d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - (d - d^o)H^o - dL^o$ はゼロとなる。なぜならば、毎期、賦課方式年金の収支は均衡し、「保険料の支払い = 年金の受け取り」となり、これは

3　資本減耗率を δ とした場合、$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$ となり、これは、(純投資) = (粗投資) − (減耗分) である。これを変形すると $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$ となる。第 t 期の期首に存在する資本は K_t、第 t 期の期末には $(1 - \delta)K_t$ になる。第 t 期の若年世代は貯蓄をもとに第 t 期の老年世代から残存資本と I_t を購入し、$(1 - \delta)K_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = s_t^hH + s_t^lL$ となる。これを整理すると、$K_{t+1} = s_t^hH + s_t^lL$ となり、資本減耗を考慮しても (20) は成立する。詳細は二神 (2012) p.63 を参照。

$$(d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y + H^o d^o = H^o d + L^o d$$

と表すことができる。したがって、(A.5) は、

$$K_{t+1} = s_t^h H^y + s_t^l L^y + (1 + r_t)\left(K_t - s_{t-1}^h H^o - s_{t-1}^l L^o\right) \tag{A.6}$$

となる。

次に (A.2) に高所得者と低所得者の若年期の予算制約式 (5), (7) を代入し、t=0とおく。

$$\begin{aligned}K_1 &= [s_0^h + (d - vd^o)]H^y + [s_0^l + (d - vd^o)]L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o \\ &= s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 + (d - vd^o)H^y + (d - vd^o)L^y - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o \\ &= s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o + H^y d - vH^y d^o + L^y d - vL^y d^o\end{aligned}$$

ここで、$v = \frac{H^o}{H^y + L^y}$, $H^y + L^y = 1$ より

$$K_1 = s_0^h H^y + s_0^l L^y + (1 + r_0)K_0 - c_0^{oh}H^o - c_0^{ol}L^o + d - H^o d^o \tag{A.7}$$

を得る。0期が老年期となる初期の老年者は全体でK_0の資産を保有し、その利子所得 r_0 K_0 を得るが、高い資産所得を持つ人々は保険料 d^o H^o を支払う。その残額に0期の老年者全員が受け取る年金 $d\,(H^0 + L^0)$ を加えた総額がすべて消費に充てられる。これを式で表すと、

$$(1 + r_0)K_0 + d(H^0 + L^0) - d^o H^o = c_0^{oh}H^o + c_0^{ol}L^o$$

となる。$H^0 + L^0 = 1$ であることに注意し、この式を (A.7) の右辺に代入すると、

$$K_1 = s_0^h H^y + s_0^l L^y$$

となる。

この (A.7) は任意の t で成立するので、人口は成長しないという仮定より、

$$\begin{aligned}K_t &= s_{t-1}^h H^y + s_{t-1}^l L^y \\ &= s_{t-1}^h H^o + s_{t-1}^l L^o\end{aligned} \tag{A.8}$$

となる。これを (A.6) に当てはめると、資金市場均衡条件

$$K_{t+1} = s_t^h H + s_t^l L. \tag{20}$$

が成り立つ。

Pay-as-you-go pension systems supported by the old rich

Kotono Tanigawa
Tomoya Sakagami*

Abstract

In this paper, we present a pension policy that supplements the pay-as-you-go pension system with payments by old generation with a high assets income. This supplement is intended to reduce intergenerational inequity. To analyze the effect of this pension policy on both capital stock in the economy and utilities of the rich and poor, we build an Over-Lapping Generations model with different income when young. This model find that the stable steady-state capital stock level increases as the old rich generation contribution to the pension system. We also find by numerical simulations that there is an agreeable premium level between high-income and low-income people.

Key words : pay-as-you-go pension system, intergenerational inequity, overlapping generations model