

完全ポテンシャルゲームとしての正規形ゲームと 混雑ゲームの性質

慶 田 收

1. はじめに

ゲーム理論に繰り返しゲームがある。これは同じプレーヤーが有限回あるいは無限回のプレイを繰り返すゲームである。ところが繰り返してゲームがプレイされるにしても、集団の中から毎回異なるエージェント同士がプレイすることになれば、繰り返しゲームと異なる曲面が現れる。集団から選ばれたエージェントがゲームをする点では通常のゲームと同じであるが、ランダムに選ばれたエージェントによるゲームが次々となされる結果、エージェントが選んだ戦略は最終的に1つの戦略に決まる場合もあれば、そうでない場合もある。集団におけるゲームでは、分析の関心は戦略だけでなく、戦略を選ぶエージェントの分布にあり、集団のなかでどのような戦略分布が均衡あるいは安定状態なのかを議論する。集団に関するゲーム論としては進化ゲーム (evolutionary game) があり、数理生物学をはじめとして、経済学、社会学などさまざまな分野で研究がなされている。進化ゲーム理論ではゲームにおける安定な状態としての「進化的安定」という概念が Maynard-Smith (1974) によって導入されて以後、進化的安定とナッシュ均衡との関係をはじめとして、諸均衡概念間の関係などの研究がなされてきた。

Sandholm (2010) は、進化ゲームから動学メカニズムを省いた集団に関するゲーム理論 (集団ゲーム、population game)¹⁾ 概念的に整理する一方で、集団ゲームの視点からポテンシャルゲームを議論している。ポテンシャルゲームは、Monderer and Shapley (1996) の研究に代表されるように、エージェントの戦略変更によるペイオフ (利得) の変化 (あるいは、変化の方向) が1つの共通のスカラー関数 (ポテンシャル関数) の変化 (あるいは、変化の方向) によって

1) 集団ゲームは population gameの訳である。population gameを人口ゲームでなく集団ゲームと訳したのは、ここでの populationは「人間の集団」だけでなく広く「生物の集団」を対象とするためである。

とらえられるゲームである。Sandholm (2009) は、集団ゲームとしてのポテンシャルゲームの構成を試みて、これが Monderer and Shapley (1996) のポテンシャルゲームと同値になることを証明している。集団ゲームの場合、ポテンシャル関数が社会的ペイオフを表すので、エージェントのペイオフ変化が社会的ペイオフ変化と同方向に変化するという性質をもち、個人と全体の関係の分析を容易にする。

Sandholm (2010) は、同 (2009) を整理して集団としてのゲームを導入したのち、新たなタイプのポテンシャルゲーム (full potential game、完全ポテンシャルゲーム)²⁾ を構成している。集団ゲームではエージェントの分布状態は (戦略数 - 1) の単体の点として表されるが、完全ポテンシャルゲームは完全ポテンシャル関数とその単体を含む空間全体を定義域にもつゲームである。この完全ポテンシャルゲームに基づいて単体を定義域にもつポテンシャルゲームを再定義している。Sandholm (2010) は、集団に関するゲームを概念的に整理している点、また集団ゲームとしてポテンシャルゲームを再構成している点で、集団に関するゲームを研究する者の関心を惹きつける。

本研究ノートでは Sandholm (2010) によって示された集団ゲームおよび関連したポテンシャルゲームとその諸性質を紹介し、一部証明が省略されている性質については証明をおこなう。同時に、完全ポテンシャルあるいはポテンシャルゲームの例として挙げられた正規形ゲーム (正規形ゲームは通常のゲーム理論における利得の双行列) と混雑ゲーム (プレーヤーによる戦略選択が他のプレーヤーの利得に外部性効果が及ぶようなゲーム) に関する諸性質の証明をおこなう。こうした正規形ゲームと混雑ゲームの性質の確認は集団ゲームに対する理解を深めると同時に、集団ゲームから進化ゲームへの理解につながるものと考えられる。

研究ノートの構成は次のとおりである。第 1 節の「はじめに」のあと、Sandholm (2010) が提示した集団ゲーム、完全ポテンシャルゲーム、ポテンシャルゲームをそれぞれ第 2 節から第 4 節で掲示すると同時に、これらのゲームについて証明された定理、性質などを紹介し、一部についてはその証明をおこなう。第 5 節の正規形ゲームと第 6 節の混雑ゲームでは、集団ゲームや完全ポテンシャルゲームとしての性質、第 2 節から第 4 節の定理や系などを用いて証明を行なう。第 7 節で本研究ノートを締めくくる。

2) full の訳出については、物理学の分野で full potential equation を完全ポテンシャル方程式という用語が割り当ててある。それに倣い full を「完全」と訳出した。同様に full population game を完全集団ゲームと訳した。

2. 集団ゲームとは

2.1 集団、戦略、状態

はじめに集団ゲームとはどのようなものかを考える。社会を形成する集団とその構成員であるエージェント、エージェントが選択する戦略、戦略を選択したエージェントの規模とその分布について定義する。これらの定義は Sandholm (2010) に従う。ゲームをおこなうエージェントと戦略を次のように仮定する。エージェントの数は大きく、エージェントによって社会を構成する集団が形成される。集団の中では一人ひとりのエージェントは小さく、その行動は他のエージェントのペイオフにほとんど影響しないが、各エージェントの戦略選択によるエージェントの戦略分布をとおして他者の行動に影響する。戦略の数は有限である。エージェントはランダムに選ばれて他のすべてのエージェントと対戦する。

社会は $p(\geq 1)$ 個の集団 (populations) から構成され、集団全体を集合 $\mathcal{P} = \{1, \dots, p\}$ で表す。集団はゲームをプレイするエージェントからなり、集団の規模をエージェントの連続体マス (mass)³⁾ としてとらえ、 p 番目の集団マスを $m^p > 0$ で表す。集団 p のエージェントにとって使用可能な戦略集合を $S^p = \{1, \dots, n^p\}$ で表し、戦略の典型的な要素表現として i, j を用い、正規形ゲームの説明では s^p を用いる。すべての集団にとっての純粋戦略の総数は $n = \sum_{p \in \mathcal{P}} n^p$ となる。

ゲームでは集団 p の各エージェントは S^p から (純粋) 戦略を選ぶ。集団 p の集団状態あるいは戦略分布 (population states or strategy distribution) の集合を $X^p = \{x^p \in \mathbb{R}_+^{n^p} : \sum_{i \in S^p} x_i^p = m^p\}$ で表す。スカラー $x_i^p \in \mathbb{R}_+$ は集団 p において戦略 $i \in S^p$ を選択したエージェント・マス (エージェントの規模) を表す。 X^p の頂点集合 X_v^p に属する各要素はすべてのエージェントが同じ戦略を選ぶ状況を意味するので、 X_v^p を純粋集団状態 (pure population states) という。集団全体からなる社会の戦略集合を $S = \prod_{p \in \mathcal{P}} S^p = \{s = (s^1, \dots, s^p) \in \mathbb{R}_+^n : s^p \in S^p\}$ で表すと、 S に対応する社会状態の集合は $X = \prod_{p \in \mathcal{P}} X^p = \{x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}_+^n : x^p \in X^p\}$ である。 X の要素すなわち社会状態の集合の要素 x は、一度にすべての集団の行動を記述する。 $X_v = \prod_{p \in \mathcal{P}} X_v^p$ の要素は X の頂点であり、純粋社会状態 (pure social state) と呼ぶ。

3) 集団の規模が離散的な有限値ならば、プレーヤーの「数」にあたるが、ここでは連続体としてとらえている。物理学の分野では「質量」などとされているが、ここでは英語表記 mass をそのまま「マス」として表現する。

2.2 ペイオフ (payoff)

社会における集団の総数は一定とし、またエージェントが使用する戦略も一定とする。つまり社会集合 \mathcal{P} と戦略集合 S は固定している。ゲームから得られる利得をペイオフ関数 $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ で表す。ペイオフ関数は社会を構成する各集団に 1 つのペイオフ・ベクトルを割り当てる。集団 p におけるペイオフ・ベクトルの第 i 要素は集団 p にとって利用可能な戦略 i のペイオフである。すなわち、 $F_i^p: X \rightarrow \mathbb{R}$ は集団 p の戦略 $i \in S^p$ のペイオフ関数を表す。さらに $F^p: X \rightarrow \mathbb{R}^{n^p}$ は集団 p の S^p に属するすべての戦略から得られるペイオフの関数である。ペイオフ関数は連続関数であると仮定する。 F は連続であると仮定するが、 F はリップシッツ (Lipschitz) 連続、すなわち連続微分可能 (C^1 級) であるというさらに強い仮定を設けることもある。

各集団の平均ペイオフと社会全体としての集計ペイオフをつぎのように定義する。

定義：平均ペイオフと集計ペイオフ

社会状態 x において集団 p のエージェントが平均して受け取る (ウェイト付き) 平均ペイオフは

$$\bar{F}^p(x) = \frac{1}{m^p} \sum_{i \in S^p} x_i^p F_i^p(x)$$

である。同様に、社会全体にわたって集計する集計ペイオフ (aggregate payoff) は

$$\bar{F} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in S^p} x_i^p F_i^p(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} m^p \bar{F}^p(x)$$

である。

2.3 最適反応 (Best Responses⁴⁾) とナッシュ均衡

ナッシュ均衡を導入するために集団 p の純粋最適反応対応 (pure best response correspondence) $b^p: X \Rightarrow S^p$ を定義する。対応 b^p は社会状態 x のもとでの最適な戦略 (集合) を示す。

定義：純粋最適反応対応とは

$$b^p(x) = \operatorname{argmax}_{i \in S^p} F_i^p(x)$$

である。

もし $i, j \in b^p(x)$ ならば、社会状態 x で $F_i^p(x) = F_j^p(x) > F_k^p(x) (k \notin b^p(x))$ である。集

4) 訳語として最適反応、最適応答がある。ここでは最適反応を用いた。

団内の各エージェントは最適反応として i または j の純粋戦略を選択するので、集団による選択戦略状態は $x_i^p > 0, x_j^p > 0$ で、 $x_k^p = 0 (k \notin b^p(x))$ である。

集団 p のエージェント・マスを 1 に基準化した $\Delta^p = \{y^p \in \mathbb{R}_+^{n^p} : \sum_{i \in S^p} y_i^p = 1\}$ は $\mathbb{R}_+^{n^p}$ における単体を表す。このとき

定義：集団 p の混合最適反応対応 (mixed best response correspondence) $B^p : X \Rightarrow \Delta^p$ は

$$B^p(x) = \{y^p \in \Delta^p : y_i^p > 0 \Rightarrow i \in b^p(x)\}$$

である。

ここで $x_i^p = m^p y_i^p$ である。 $B^p(x)$ は社会状態 x で最適である純粋戦略だけを含む台 (supports) の確率分布集合である。幾何的には $B^p(x)$ は要素 $b^p(x)$ から構成される Δ^p の頂点の凸包 (convex hull) である。

つぎにゲーム F のナッシュ均衡を定義する。

定義：社会状態 $x \in X$ がゲーム F のナッシュ均衡であるとは、すべてのエージェントの最適反応：

$$NE(F)^p = \{x \in X : x^p \in m^p B^p(x) \text{ for all } p \in \mathcal{P}\}$$

を満たすことである。

同値的な表現として、 x は各集団内の戦略のなかで最大ペイオフをもたらす戦略分布から成る、すなわち

$$NE(F) = \{x \in X : [x_i^p > 0 \Rightarrow F_i^p(x) \geq F_j^p(x)] \text{ for all } i, j \in S^p, p \in \mathcal{P}\}$$

ならば、社会状態 x はナッシュ均衡である。

定理 2.1 いかなる集団ゲームも少なくとも 1 つのナッシュ均衡を可能にする。

3. 完全ポテンシャルゲーム (Full Potential Games)

3.1 完全集団ゲーム (Full Population Games)

単一集団のエージェントによるゲーム F を考える。ゲームの集団状態は $X = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{k \in S} x_k = 1\}$ 、すなわち \mathbb{R}_+^n の単体 (simplex) の要素であり、戦略 i のペイオフ F_i は定義域 (domain) X 上の実数値関数である。通常、集団ゲームでペイオフ関数に関する有効な情報は、エージェントが新たに戦略 j をプレイすることで現在選んでいる戦略 i のペイオフに及ぼす限界効果 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ と考えられる。しかし、この限界効果が問題である。 F_i は

単体上でのみ定義されているので、たとえ関数 F が微分可能であるとしても偏微分 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ は存在しない。理由は、偏微分 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ は x_j 以外の変数 x_k を不変に保ちつつ x_j を微小に変化させることなので、 x_j を微小に変化させた後の x はもはや X に存在せず $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ は定義しえないからである。これを解決するために Sandholm (2010) はペイオフ関数の定義域を拡張している。すなわち、偏微分 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ の存在を保証するためにゲーム F の定義域を状態空間 $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k \in S} x_k = 1\}$ から正象限全体 \mathbb{R}_+^n に拡大している。同様に複数の集団の場合にも、本来の社会状態集合 $X = \{x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in S^p} x_i^p = m^p\}$ から \mathbb{R}_+^n へ拡張する。いずれの設定でも正象限で定義されるペイオフをとまなうゲームであり、これを完全集団ゲーム (full population game) と呼ぶ。このゲームの特徴はペイオフ関数の定義域を拡張して、集団規模の変化をとらえようとするにある。⁵⁾

3.2 完全ポテンシャルゲームの定義

はじめに完全ポテンシャルゲームを定義する。

定義 完全ポテンシャルゲーム

$F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ を完全集団ゲームとする。 F はつぎの条件を満たすならば完全ポテンシャルゲーム (full potential game) である。条件: 連続微分可能関数 $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$\nabla f(x) = F(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}_+^n \quad (3.1)$$

を満たす。

性質 (3.1) は、要素表現として

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^p}(x) = F_i^p(x) \quad \text{for all } i \in S^p, p \in \mathcal{P}, x \in \mathbb{R}_+^n$$

である。

$x \in X$ は $F_j^p(x) > F_i^p(x)$ なる集団状態であるとする。少数のエージェント・グループが戦略 i から戦略 j に変更すると仮定する。その変化は変位ベクトル $z = e_j^p - e_i^p$ で表される。ここで e_i^p は \mathbb{R}^n における (i, p) 標準基底である。ポテンシャルへの限界的な影響は

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x) = \nabla f(x)' z = \frac{\partial f}{\partial x_j^p}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i^p}(x) = F_j^p(x) - F_i^p(x)$$

5) Sandholm (2001) では、単体に厚みをつけた近傍をペイオフ関数の定義域として再定義してポテンシャルゲームを構成している。

となる。この式から明らかなことは、エージェントによる有利な戦略への見直しはポテンシャルを増加させることとなることが分かる。 C^1 級写像 $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は、その偏導関数行列 $DF(x)$ (ヤコビ行列) が対称であるならば、そのときにのみポテンシャル関数 (potential function) を可能にする。⁶⁾

性質 3.1 完全外部対称性

集団ゲーム F は C^1 級であるとする。このとき F が完全ポテンシャルゲームであるとの必要十分条件は、完全外部対称性 (full externality symmetry) :

$$DF(x) \text{ はすべての } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ について対称であること} \quad (3.2)$$

を満たすことである。

したがって、 F がポテンシャルゲームであるためには、

$$\frac{\partial F_i^p}{\partial x_j^q}(x) = \frac{\partial F_j^q}{\partial x_i^p}(x) \quad \text{for all } i \in S^p, j \in S^q, p, q \in \mathcal{P}, x \in \mathbb{R}_+^n \quad (3.3)$$

であることが必要十分である。

(3.2) の経済的意味は、戦略 $j \in S^q$ を選択する新たなエージェントの増加が戦略 $i \in S^p$ のペイオフへ及ぼす影響は、常に戦略 $i \in S^p$ を選択する新たなエージェントの増加による戦略 $j \in S^q$ のペイオフへの影響に等しいことを意味する。

3.3 完全ポテンシャルゲームのナッシュ均衡

完全ポテンシャルゲームでは、有利な戦略への見直しがポテンシャルを増加させる。これは完全ポテンシャルゲームのナッシュ均衡がポテンシャルを局所最大にすることである。よって非線形計画

$$\begin{aligned} \max f(x) \quad \text{subject to} \quad & \sum_{i \in S^p} x_i^p = m^p \text{ for all } p \in \mathcal{P}, \\ & x_i^p \geq 0 \text{ for all } i \in S, p \in \mathcal{P} \end{aligned} \quad (3.4)$$

の極値のための条件を考えると、極大化問題のラグランジュ関数は

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \mu^p (m^p - \sum_{i \in S} x_i^p) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in S} \lambda_i^p x_i^p$$

6) Sandholm (2010) p. 108を参照。

なので、極大化のためのクーン・タッカー1階必要条件 (Kuhn-Tucker first-order necessary conditions) は次のようになる.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^p}(x) = \mu^p - \lambda_i^p \text{ for all } i \in S, p \in \mathcal{P} \quad (3.5)$$

$$\lambda_i^p x_i^p = 0 \text{ for all } i \in S, p \in \mathcal{P} \quad (3.6)$$

$$\lambda_i^p \geq 0 \text{ for all } i \in S, p \in \mathcal{P} \quad (3.7)$$

クーン・タッカー1階必要条件を $KT(f)$ と表すと、

$KT(f) = \{x \in X : (x, \mu, \lambda) \text{ は、ある } \lambda \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p \text{ に対して (3.5)-(3.7) を満たす} \}$ であり、 $KT(f)$ は完全ポテンシャルゲーム F のナッシュ均衡を特徴づける.

定理 3.2 F が完全ポテンシャルゲームならば、 $NE(F) = KT(f)$ である.⁷⁾

定理 3.2 は完全ポテンシャルゲームのナッシュ均衡解とポテンシャルを極大化するクーン・タッカー条件を満たす解が一致することを表す. ナッシュ均衡解を見つけるためにクーン・タッカー条件解を見出せば良い. とくにポテンシャル関数 $f(x)$ が凹あるいは厳密に凹であるならば、ナッシュ均衡解は次のようになる.

系 3.3 ポテンシャル関数が凹であるときのナッシュ均衡解

1. f が X 上で凹ならば、 $NE(F)$ は X 上での f を最大にする状態 x の凸集合である.
2. f が X 上で厳密に凹ならば、 $NE(F)$ は X 上での f を最大にする一意な状態 x である.

3.4 同次完全ポテンシャルゲーム (Homogeneous Full Potential Games) の効率性

ポテンシャル関数が同次関数の場合、つぎのように完全ポテンシャル関数と集計ペイオフ関数の関係、ナッシュ均衡解と局所的効率あるいは大域的効率との関係が明らかにされる. はじめに同次完全ポテンシャルゲームする.

定義 同次完全ポテンシャルゲーム

完全ポテンシャルゲームは、ペイオフ関数 $F_i^p : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が次数 k の同次関数 (すなわち、すべての $x \in \mathbb{R}_+^n$ に対して $F_i^p(tx) = t^k F_i^p(x)$) ならば、そのときにのみ k 次同次である. なお $k \neq -1$ である.

7) 証明は Sandholm (2010) p. 59を参照.

完全ポテンシャル関数と集計ペイオフ関数については、つぎの関係が示される。

定理 3.4 完全ポテンシャルゲームの $k \neq -1$ 次同次性⁸⁾

完全ポテンシャルゲームが $k \neq -1$ 次同次であることの必要十分条件は、正規化した集計ペイオフ関数 $\frac{1}{k+1}\bar{F}(x)$ が F の完全ポテンシャル関数で、 $k+1 \neq 0$ 次同次であることである。

同次性と効率性の関係を理解するうえで重要なのが戦略 i を選択するエージェントによる集計ペイオフへのインパクト $\frac{\partial}{\partial x_i^q}\bar{F}(x)$ である。そのインパクトは

1. $\sum_{q \in P} \sum_{j \in S^q} x_j^q \frac{\partial F_j^q}{\partial x_i^q}(x)$ はエージェントの行動がライバルのペイオフに及ぼすインパクト、
2. $F_i^p(x)$ はエージェント自身のペイオフ

からなる。同次ポテンシャル (homogeneous potential) ゲームでは、エージェントが戦略を選択することで得るペイオフは、1. のインパクトがオイラーの定理より $kF_i^p(x)$ に等しいことから、集計ペイオフへのインパクト (1. と 2. のインパクトの和) に直接に比例することがわかる。このため完全ポテンシャル関数が同次関数の場合、利己的な行動は望ましい社会的結果につながる。逆に同次完全ポテンシャル関数の次数が -1 より小さい同次関数ならば、完全ポテンシャル関数は集計ペイオフに対して反比例 (negatively proportional) するので、利己的な行動は社会的に望ましくない結果をもたらす。このケースを除いた完全ポテンシャル関数が正の次数 ($k > -1$) のポテンシャルゲームを正の同次 (positively homogeneous) と呼ぶ。

完全ポテンシャルゲームでのナッシュ均衡の効率性に関する結果を次のようにまとめることができる。社会状態 x から $\varepsilon > 0$ の範囲にある近傍 $U(x, \varepsilon)$ のすべての $y \in X$ について $\bar{F}(x) \geq \bar{F}(y)$ となるような近傍 $U(x, \varepsilon)$ が存在するならば、社会状態 x はゲーム F で局所効率的 (locally efficient、 $x \in LE(F)$) という。もしこの不等式がすべての $y \in X$ について成立するならば、社会状態 x は大域的効率 (globally efficient、 $x \in GE(F)$) という。ナッシュ均衡解と局所的効率解あるいは大域的効率解との間につぎのような性質を確認することができる。

系 3.5 ナッシュ均衡、局所的効率、大域的効率解に関する性質

- (i) 完全ポテンシャルゲーム F が正同次であるならば、 $LE(F) \subseteq NE(F)$ である。
- (ii) 加えて、その完全ポテンシャル関数 f が凹であるならば、 $GE(F) = LE(F) = NE(F)$ である。

証明 (i) の証明。

8) 証明は Sandholm (2010) p 67を参照。

$$f(x) = \frac{1}{n+1} \bar{F}(x) \quad (3.8)$$

である. $x \in LE(F)$ とすると, x の近傍 $U(x, \varepsilon)$ の任意の y について $\bar{F}(x) \geq \bar{F}(y)$ である. (3.8) から

$$f(x) = \frac{1}{n+1} \bar{F}(x) \geq \frac{1}{n+1} \bar{F}(y) = f(y)$$

となる. x は近傍 $U(x, \varepsilon)$ での f の最大値をもたらすので, x はクーン・タッカー条件を満たす. よって $x \in KT(f)$ である. 定理 3.2 から $NE(F) = KT(f)$ なので, $x \in NE(F)$ である. ゆえに $LE(F) \subseteq NE(F)$ である.

(ii) の証明.

$f(x)$ が凹関数なので, 系 3.3 の 1 から $NE(F)$ は凸集合である.

また $f(x)$ が凹であることから, $LE(F) = GE(F)$ が次のようにして示される. 一般に $LE(F) \supseteq GE(F)$ であるが, $\hat{x} \in LE(F)$, $\hat{x} \notin GE(F)$ となる \hat{x} が存在しないことを示す. $x^* \in GE(F)$ とする. \hat{x} と x^* の凸結合 y を作る.

$$y = t\hat{x} + (1-t)x^* \quad (t \in (0, 1))$$

$f(x)$ が凹関数なので

$$f(y) > tf(\hat{x}) + (1-t)f(x^*) \quad (t \in (0, 1)) \quad (3.9)$$

が成立しなければならない。

他方 $\hat{x} \in LE(F)$ なので近傍 $U(\hat{x}, \varepsilon)$ の x については, $f(\hat{x}) \geq f(x)$ となる. いま y が近傍 $U(\hat{x}, \varepsilon)$ 内に含まれるように 1 に十分近い t の値をとると, $f(\hat{x}) \geq f(y)$ になる. この式と式 (3.9) から

$$f(\hat{x}) \geq f(y) > tf(\hat{x}) + (1-t)f(x^*) \quad (3.10)$$

となって, 矛盾する. したがって $x \in LE(F)$ ならば, $x \in GE(F)$ でなければならない. $f(x)$ の極値をもたらす x は, 関数 $f(x)$ の凸性から, $LE(F) = KT(f)$ に他ならない. 以上から, $GE(F) = LE(F) = NE(F)$ である.

4. ポテンシャル・ゲーム

エージェントが戦略 j をプレイすることで戦略 i を選んでいるエージェントのペイオフに

及ぼす限界効果 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ 本来の状態空間 X で定義できないために、定義域として X を含む \mathbb{R}_+^n に拡張することが完全ポテンシャルゲームであった。本節では改めて Sandholm (2009) および Sandholm (2010) によるポテンシャルゲームの定義およびポテンシャルゲームと完全ポテンシャルゲームとの関係について記述する。

4.1 ポテンシャルゲームの定義と特徴

ポテンシャルゲームは、幾何的には接空間 (tangent spaces) と正射影 (orthogonal projection) を用いて定義される。準備として単体 X の接空間とペイオフベクトル π の接空間への正射影を説明する。集団 p の状態空間 $X^p = \{x^p \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in S^p} x_i^p = m^p\}$ に対し、 X^p の接空間 TX^p は X^p におけるすべての方向への変化を含む \mathbb{R}^{n^p} 最小部分空間、 $TX^p = \mathbb{R}_0^{n^p} \equiv \{z^p \in \mathbb{R}^{n^p} : \sum_{i \in S^p} z_i^p = 0\}$ である。行列 $\Phi \in \mathbb{R}^{n^p} \times \mathbb{R}^{n^p}$ は \mathbb{R}^{n^p} から TX^p への全射 (onto) の正射影すなわち、 $\Phi = I - \frac{1}{n^p} \mathbf{1}\mathbf{1}'$ とする。 $\pi^p \in \mathbb{R}^{n^p}$ がペイオフベクトルならば、射影されたペイオフベクトル $\Phi\pi^p$ は π^p の相対ペイオフを表し、ペイオフの合計をゼロに正規化するときの π^p の要素間の差である。次に社会状態 $x \in X = \prod_{p \in \mathcal{P}} X^p$ の変化は X の接空間 $TX = \prod_{p \in \mathcal{P}} TX^p$ の要素によって表されるため、行列 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を \mathbb{R}^{n^p} から TX への正射影であるブロック対角行列を $\text{diag}(\phi, \dots, \phi)$ とするとき、社会のペイオフベクトル $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^p) \in \mathbb{R}^n$ は p 個の要素が ϕ によって正規化される結果、 $\Phi\pi = (\phi\pi^1, \dots, \phi\pi^p)$ となる。

以上をもとに、ポテンシャルゲーム定義はつぎのように定義される。

定義 ポテンシャルゲーム

$F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ は集団ゲームとする。 F がポテンシャル関数 f 、すなわち、

$$\nabla f(x) = \Phi F(x) \text{ for all } x \in X \quad (4.1)$$

を満たす C^1 級関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を可能にするならば、 F はポテンシャルゲームである。

ポテンシャル関数 f は定義域 X をもつので、勾配ベクトル $\nabla f(x)$ は定義より接空間 TX の要素である。ポテンシャルゲームの定義は勾配ベクトルが常に $f(x)$ 、すなわちペイオフベクトル $f(x)$ を接空間 TX への射影したものに等しいことを求める。他方で \mathbb{R}_+^n 全体で定義される関数を使ってポテンシャルゲームを定義することができる。

系 4.1

F がポテンシャル関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ をもつポテンシャルゲームならば、 f を拡張した C^1 級関数 $\tilde{f}: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\Phi \nabla \tilde{f}(x) = \Phi F(x) \quad \text{for all } x \in X \quad (4.2)$$

を満たす。逆に集団ゲーム F が条件 (4.2) を満たす関数 \tilde{f} を可能にするならば、 F はポテンシャルゲームである。このとき関数 $f = \tilde{f}|_X$ (定義域を X に制限した関数) は F のポテンシャル関数である。

これは定義の直接的な帰結である。とくに X 上で \tilde{f} と f が一致するならば、すべての $x \in X$ について勾配ベクトル $\nabla \tilde{f}(x)$ と $\nabla f(x)$ が $\Phi \nabla \tilde{f}(x) = \Phi \nabla f(x)$ の意味で TX 上の等しい線形作用素になっている。 $\Phi \nabla \tilde{f}(x) = \nabla f(x)$ なので、この不等式は定義 (4.1) から (4.2) をもたらす。

完全ポテンシャルゲームと同様に、ポテンシャルゲームはペイオフ導関数 $DF(x)$ の対称性条件によって特徴づけられる。

定理 4.2 ⁹⁾

集団ゲーム $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 級であるとする。そのとき F がポテンシャルゲームであるための必要十分条件は、 F が外部対称性 (externality symmetry) :

$$DF(x) \text{ はすべての } x \in X \text{ について } TX \times TX \text{ に関して対称である。} \quad (4.3)$$

系 4.3

集団ゲーム $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 級、 $\tilde{F} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が任意の C^1 級の F の拡張であるとする。そのとき F が対称外部性 (externality symmetry) を満たす必要十分条件は、 $\Phi D\tilde{F}(x)\Phi$ がすべての $x \in X$ に対して対称なことである。

外部性対称性 (4.3) は

$$z' DF(x) \hat{z} = \hat{z}' DF(x) z \text{ for all } z, \hat{z} \in TX \text{ and all } x \in X$$

と表現することもできる。

e_i^p を \mathbb{R}^n の標準基底ベクトルとする。 $z = e_j^p - e_i^p$ かつ $\hat{z} = e_l^q - e_k^q$ ときに必ず外部性対称性 (3.11) は成り立つ。言い換えると (3.11) が

$$\frac{\partial(F_j^p - F_i^p)}{\partial(e_l^q - e_k^q)}(x) = \frac{\partial(F_l^q - F_k^q)}{\partial(e_j^p - e_i^p)}(x) \text{ for all } i, j \in S^p, k, l \in S^q, p, q \in \mathcal{P}, x \in X. \quad (4.4)$$

に同値である。

9) 証明は Sandholm (2009) p. 15、または Sandholm (2010) p. 73を参照。

(3.12) の左辺は、集団 q のエージェントによる戦略 $k \in S^q$ から戦略 $l \in S^q$ への転換が、集団 p のエージェントの戦略 $i \in S^p$ から戦略 $j \in S^p$ への転換による相対ペイオフに及ぼす変化をとらえ、この効果は右辺の i から j への戦略転換が k に対する l の相対ペイオフに及ぼす変化に等しいことを表す。この記述は完全外部対称性 (3.2) に類似していて、社会状態の相対ペイオフと実行可能な社会状態の変化を表している。

命題 4.4

F を C 級の単一集団ゲームとする。 F は三角積分 (triangular integrability)

$$\frac{\partial F_i}{\partial(e_j - e_k)}(x) + \frac{\partial F_j}{\partial(e_k - e_i)}(x) + \frac{\partial F_k}{\partial(e_i - e_j)}(x) = 0 \text{ for all } i, j, k \in S, x \in X \quad (4.5)$$

を満たすならば、 F はポテンシャルゲームである。¹⁰⁾

4.2 ポテンシャルゲームと完全ポテンシャルゲーム

完全ポテンシャルゲームとポテンシャルゲームの関連性を確認する。前者の場合、条件 (3.1) はペイオフが \mathbb{R}_+^n で定義されるポテンシャル関数から決まることを求めるが、後者の場合、条件 (4.1) は相対ペイオフ (relative payoff) がちょうど X 上で定義されるポテンシャル関数で決まることを求めるという違いがある。

2つの定義の関係を知るために、ポテンシャル関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ をもつポテンシャルゲーム $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ をとり、 f を関数 $\tilde{f} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ へ拡張して調べる次の定理 4.5 が得られ、完全ポテンシャルゲーム $\tilde{F} \equiv \nabla \tilde{f}$ と元のゲーム F の間のつながりは、拡張 \tilde{f} がどのように選ばれるかに依存することを示している。

定理 4.5 ポテンシャルゲームと完全ポテンシャルゲーム

$F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ をポテンシャル関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ をもつポテンシャルゲームとする。 $\tilde{f} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ を f の任意の C^1 級の拡張とする。完全ポテンシャルゲーム $\tilde{F} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\tilde{F}(x) = \nabla \tilde{f}(x)$ によって定義する。このとき

1. 集団ゲーム F と $F|_X$ が同じペイオフ： $\Phi F(x) = \Phi \tilde{F}(x)$ for all $x \in X$ をもつ。
2. 拡張 \tilde{f} を、 F と $\tilde{F}|_X$ が一致するように選ぶことができる。¹¹⁾

10) 証明は Sandholm (2009) pp. 16-17を参照

11) 証明は Sandholm (2009) pp. 13-14を参照。

定理 4.5 の 1 は、ポテンシャル関数 f の任意の拡張から作られる完全ポテンシャルゲーム \tilde{F} が共通の定義域 X では F と同じペイオフを持つことを示す。したがって、 F と \tilde{F} が同じ最適反応対応とナッシュ均衡をもつが、異なる平均ペイオフを示すことがある。定理の 2 は適当に拡張 \tilde{f} を選ぶことで、 \tilde{F} と F を X 上で一致させることができる。このためには X 上の状態での偏導関数が TX に対して垂直方向で評価されるとき、それが元のゲーム F からの平均ペイオフの情報を取り込むように拡張 \tilde{f} を作ることである。

定理 4.5 は、3.3 の完全ポテンシャルゲームのナッシュ均衡に関するすべての結果がポテンシャルゲームに適用できることを示唆する。しかし 3.4 の効率性の結果についてはそうでない。とくに、定理 3.4 の証明は、オイラー (Euler) 定理 (同次関数の性質) の応用は F の偏微分を明示的に利用するので、完全ポテンシャルゲームとしてのゲーム F に依存している。実際、ポテンシャルゲームが 3.4 で記述されている効率性の性質を確立するには、 F が同次完全ポテンシャルゲーム (homogeneous full potential game) に拡張される必要がある。よってポテンシャルゲーム $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は相対ペイオフだけをとらえるので、相対ペイオフと平均ペイオフに依存する効率性に関する結果を証明することができない。

5. 正規形ゲーム

5.1 正規形ゲームのマッチング (Matching Normal Form Games)

進化ゲーム論の標準的な例として正規形ゲームのマッチングがあり、これはエージェントの利得が双行列によって表現されるゲームである。第 5 節ではこの正規形ゲームを集団ゲームの視点から分析をおこなう。

(i) 対称ゲームをプレイする単一集団 (single population) のマッチング

対称 2 人プレーヤー正規形ゲームは、戦略集合 $S = \{1, \dots, n\}$ とペイオフ行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ によって定義される。要素 A_{ij} はエージェントが戦略 i をえらび、対戦相手が戦略 j を選ぶときにエージェントが獲得するペイオフである。このペイオフ行列は対称なので、当該プレーヤーがエージェント I あるいはエージェント II であるかには依存しない。

正規形の集団ゲームでは、1 単位マス (unit mass) 規模の集団から選ばれるエージェントがそれぞれ異なるエージェントと 1 回限りの出会いでマッチするように A をプレイすると仮定する。¹²⁾ すべての対戦相手とのマッチングについて集計すると、集団状態が x であるとき戦略

12) 完全決定論的マッチングをする代わりに、各エージェントはランダムに対戦相手とマッチすると仮定することもできる

i のペイオフは $F_i(x) = \sum_{j \in S} A_{ij}x_j = (Ax)_i$ となる. よって集団ゲームのペイオフは A による線形写像 $F(x) = Ax$ によって記述される.

完全集団ゲームの場合、エージェントは 2 人対称正規形ゲーム $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ をプレイする. このゲームは集団ゲーム $F(x) = Ax$ を生成し、このとき F は \mathbb{R}_+^n で定義される. 対称正規形ゲーム $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は 2 人のエージェントが同じペイオフを受け取るような共通利害をもつときで、 A のすべての i と j 要素について $A_{ij} = A_{ji}$ を意味する. $DF(x) = A$ なので、条件 (3.2) からこのゲームは完全ポテンシャルゲームである. 戦略 i のペイオフは $F_i(x) = \sum_{j \in S} A_{ij}x_j = (Ax)_i$ は x に関して線形、すなわち 1 次同次である. このため完全ポテンシャルゲームの同次性の定義より、完全ポテンシャルゲームは 1 次同次である. そのポテンシャル関数は、直接計算できるが、定理 3.4 から F の集計ペイオフ関数 $x'Ax = \sum_{i \in S} x_i F_i(x) = \bar{F}(x)$ の半分、すなわち

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Ax$$

が導かれる.

(ii) 2 集団のマッチング (Matching Two-Populations)

非対称な 2 人プレーヤー (two-player) ゲームは異なる 2 集団のマッチングとしてとらえられ、各集団の戦略集合 $S^1 = \{1, \dots, n^1\}, S^2 = \{1, \dots, n^2\}$ とそのペイオフ行列 $U^1 \in \mathbb{R}^{n^1 \times n^2}, U^2 \in \mathbb{R}^{n^1 \times n^2}$ によって定義される. $n^1 = 2, n^2 = 3$ の双行列を次のようにつくる.

		プレーヤー II		
		1	2	3
プレーヤー I	1	u_{11}^1, u_{11}^2	u_{12}^1, u_{12}^2	u_{13}^1, u_{13}^2
	2	u_{21}^1, u_{21}^2	u_{22}^1, u_{22}^2	u_{23}^1, u_{23}^2

1 つの集団の規模は 1 単位マスとすると、2 つの集団全体で集団規模は 2 単位マスになる. 1 つの集団の各プレーヤーは他の集団のすべてのメンバーとマッチしてゲーム (U^1, U^2) をプレイするか、または別の方法として各エージェントはランダムに他の集団のメンバーとマッチすると仮定する. いずれの方法でも 2 集団それぞれのペイオフ関数は $F^1(x) = U^1 x^2, F^2(x) = U^2 x^1$ として与えられ、集団ゲーム全体は線形写像

$$F(x) = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ F^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{U}^1 \\ \mathcal{U}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^1 x^2 \\ (\mathcal{U}^2)' x^1 \end{pmatrix}$$

として記述される.

(iii) p 個の集団のマッチング (Matching in p Populations)

一般化した p プレーヤー正規形ゲームを定義する. $S^p = \{1, \dots, n^p\}$ は集団 p の戦略集合を表し、直積集合 $S = \prod_{q \in \mathcal{P}} S^q$ はすべての集団の純粋戦略集合を表す. 集団 p のエージェントのペイオフ関数 \mathcal{U}^p は S から \mathbb{R} への写像として表される.

p 個の単位マス集団からそれぞれ 1 人ずつ選ばれるエージェントは正確に 1 回限りで各集団からの $p-1$ のエージェントと互いにマッチするように正規形ゲーム $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^1, \dots, \mathcal{U}^p)$ をプレイする. この操作によってペイオフ関数は多重線形 (すなわち、各 x^p について線形)

$$F_{s^p}^p(x) = \sum_{s^{-p} \in S^{-p}} \mathcal{U}^p(s^1, \dots, s^p) \prod_{r \neq p} x_{s^r}^r, \text{ なお } S^{-p} = \prod_{q \neq p} S^q$$

となる.

補題 5.1¹³⁾

1. 単一集団の場合、正規形ゲーム F のナッシュ均衡は対称正規形ゲーム $\mathcal{U} = (A, A')$ の対称ナッシュ均衡である.
2. 複数集団の場合、正規形ゲーム F のナッシュ均衡は正規形ゲーム $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^1, \dots, \mathcal{U}^p)$ のナッシュ均衡である.

5.2 共通利害ゲーム

正規形ゲームの特殊ケースとして、プレーヤーの戦略プロファイル s のもとですべてのプレーヤーは同じペイオフを得るような場合、つまり $S = S^k (k = 1, \dots, p)$ を検討する. p 個の集団のマッチングにおいて、すべての $s \in S, p \in \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{U}^p(s) = V(s)$ であるような関数 $V: S \rightarrow \mathbb{R}$ があるならば、正規形ゲーム $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2, \dots, \mathcal{U}^p)$ は共通利害ゲームと呼ばれる. これはどのような純粋戦略プロファイル s のもとでも、すべての p プレーヤーは同じペイオフ $V(s)$ を得ることを意味する. 社会状態 x のとき、集団 p の戦略 s^p を用いるペイオフ $F_{s^p}^p(x)$ は

13) Sandholm (2010) pp. 25-27を参照.

$$F_{s^p}^p(x) = \sum_{s^{-p} \in S^{-p}} V(s) \prod_{r \neq p} x_{s^r}^r \quad (5.1)$$

である。正規形ゲームでは必ずナッシュ均衡が存在し、対称な利得行列ならばナッシュ均衡解は対称である。

次のように正規形ゲームは完全ポテンシャルゲームであることが確認される。

命題 5.2 p 個の集団の共通利害ゲームは完全ポテンシャルゲームである。

証明

p 個の集団 ($P = \{1, \dots, p\}$) が共通の戦略集合 $S = \{1, \dots, n\}$ を用いて共通ペイオフ $V(s)$ を得る場合を考える。社会状態 x のとき集団 p の戦略 i を用いるペイオフ $F_i^q(x)$ は、式 (5.1) を変形して

$$F_i^p(x) = \sum_{s \in S - \{i\}} V(1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, n) \prod_{r \neq p} x_s^r$$

として表現される。またペイオフ $F_j^q(x)$ は

$$F_j^q(x) = \sum_{s \in S - \{j\}} V(1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, n) \prod_{r \neq q} x_s^r$$

である。限界効果 $\partial F_i^p(x)/\partial x_j^q$ 、 $\partial F_j^q(x)/\partial x_i^p$ を求めると、

$$\frac{\partial F_i^p}{\partial x_j^q} = \sum_{s \in S - \{i, j\}} V(s^1, s^2, \dots, i, \dots, j, \dots, n) \prod_{r \neq q, p} x_s^r = \frac{\partial F_j^q}{\partial x_i^p}$$

となり、完全ポテンシャルゲームのための条件 (3.3) を満たす。 ■

p 個の集団からなる共通利害ゲームでは、ペイオフの式 (5.1) で x を t 倍すると、

$$F_{s^p}^p(tx) = \sum_{s^{-p} \in S^{-p}} V(s) \prod_{r \neq p} (tx_{s^r}^r) = t^{p-1} \sum_{s^{-p} \in S^{-p}} V(s) \prod_{r \neq p} x_{s^r}^r = t^{p-1} F_{s^p}^p(x)$$

になる。よって p 個の集団からなる共通利害ゲームは、定義から $p-1$ 次同次である。

命題 5.3 p 個の集団の共通利害ゲームは $p-1$ 次同次である。

共通利害ゲーム F の集計ペイオフは次式で与えられる。

$$\bar{F}(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{s^p \in S^p} x_{s^p}^p F_{s^p}^p(x) = p \sum_{s \in S} V(s) \prod_{r \in \mathcal{P}} x_{s^r}^r$$

また、 p 個の集団の共通利害ゲームは $p-1$ 次同次なので、定理 3.4 より完全ポテンシャル関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{p} \bar{F}(x) = \sum_{s \in S} V(s) \prod_{r \in \mathcal{P}} x_{s^r}^r$$

である。共通利害ゲームでは完全ポテンシャルが集計ペイオフに比例する

系 5.4 p 個の集団の共通利害ゲームでは、完全ポテンシャル関数 $f(x)$ は集計ペイオフ関数 $\bar{F}(x)$ の $1/p$ 倍である。

完全ポテンシャル関数の $x_{s^p}^p$ に関する偏微分によって戦略 s^p に関するペイオフを確認することができる。

$$\frac{\partial f}{\partial x_{s^p}^p}(x) = \sum_{s^p \in S^p} V(s) \prod_{r \neq p} x_{s^r}^r = F_{s^p}^p(x)$$

5.3 正規形ポテンシャルゲーム

すでに正規形ゲームにおいてペイオフ行列 C が対称であるならば、正規形ゲームは完全ポテンシャルゲームなることを確認した。行列の行ベクトルが行に関係なく一定である行列を対称行列 C に加えたものを A として、 A をペイオフ行列とする集団ゲームを構成する。ペイオフ行列 A はもはや対称でなくなるために A をペイオフ行列に持つ集団ゲームが完全ポテンシャルゲームであるかどうかはわからない。ところが、この集団ゲームは次のようにしてポテンシャルゲームであることが示される。

命題 5.5 対称正規形ポテンシャルゲーム

$C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は対称で $r \in \mathbb{R}^n$ は任意のとき $A = C + 1r'$ とする。集団ゲーム $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $F(x) = Ax$ として定義すると、 F はポテンシャルゲームであり、 F のポテンシャル関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (c_{ii} + r_i) x_i^2 + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k \neq i}^n (c_{ik} + r_k) x_k \right\} x_i$$

である。

証明

C の (i, j) 成分を c_{ij} 、 r の第 i 成分を r_i 、 C の第 i 行ベクトルを C_i で表す。関数 $F(x)$ は

$$\begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 x \\ C_2 x \\ \vdots \\ C_n x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r x \\ r x \\ \vdots \\ r x \end{bmatrix}$$

であり、 $F(x)$ の第 i 成分は

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k + \sum_{k=1}^n r_k x_k \quad (5.2)$$

となる。集団ゲーム F がポテンシャルゲームであることを示すために、式 (5.2) を使って外部対称性条件 (4.4) が成立することを確認する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_i - F_j)}{\partial(e_i - e_j)}(x) &= \frac{\partial F_i}{\partial(e_i - e_j)}(x) - \frac{\partial F_j}{\partial(e_i - e_j)}(x) \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial e_i}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial e_j}(x) - \frac{\partial F_j}{\partial e_i}(x) + \frac{\partial F_j}{\partial e_j}(x) \\ &= c_{ii} - 2c_{ij} + c_{jj} \end{aligned} \quad (5.3)$$

同様にして

$$\frac{\partial(F_j - F_i)}{\partial(e_j - e_i)}(x) = c_{jj} - 2c_{ij} + c_{ii} \quad (5.4)$$

を得る。式 (5.3) と (5.4) は等しいので、集団ゲーム F はポテンシャルゲーム条件 (4.4) を満たす。よって F はポテンシャルゲームである。

つぎにポテンシャル関数を導く。ペイオフ関数 $F_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) が式 (5.2) のように x_k に関して線形であるので、 $F_i(x)$ を x_i に関して積分して $i = 1$ から n まで合計するとポテンシャル関数が得られる。はじめに $F_i(x)$ をつぎのように変形する。

$$F_i(x) = (c_{ii} + r_i)x_i + \sum_{k \neq i}^n (c_{ik} + r_k)x_k$$

これを x_i について積分すると、

$$\int_0^{x_i} F_i(t) dt = \frac{1}{2}(c_{ii} + r_i)x_i^2 + \left(\sum_{k \neq i}^n (c_{ik} + r_k)x_k \right) x_i$$

となる。さらに $i = 1 \dots n$ について合計する。するとポテンシャル関数 $f(x)$ を得る。

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (c_{ii} + r_i) x_i^2 + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k \neq i}^n (c_{ik} + r_k) x_k \right\} x_i \quad \blacksquare$$

命題 5.6 正規形ポテンシャルゲーム

正規形ゲーム $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^1, \dots, \mathcal{U}^p)$ は、関数 $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\mathcal{U}^p(\hat{s}^p, s^{-p}) - \mathcal{U}^p(s^p, s^{-p}) = V(\hat{s}^p, s^{-p}) - V(s, s^{-p}) \text{ for all } s, \hat{s}^p \in S, s^{-p} \in S^{-p}, p \in \mathcal{P} \quad (5.5)$$

を満たすならば、 $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ はポテンシャル関数、 \mathcal{U} はポテンシャルゲームである。すなわち、一方的な離脱による離脱者のペイオフの変化はポテンシャルの変化に等しい。¹⁴⁾

命題 5.6 は Monderer and Shapley(1996) の w -ポテンシャルゲームの定義に対応する。

6. 混雑ゲーム (Congestion Game)

6.1 混雑ゲームの定義と完全ポテンシャルゲーム

町と町が複数の道路によって結ばれていれば、道路によっては過剰な利用により道路混雑が引き起こされ、その結果、道路利用者に時間的・金銭的負担が発生することがある。道路に限らず道路のようなリンクによってネットワークが形成される場合に利用による混雑が発生する。ここではそのような混雑に関する混雑モデルを集団ゲームの視点から考察する。

複数の町が道路（リンク）ネットワーク（図 6.1）によって繋がっていて、人々は 2 つの町の間を一方の起点（居住地）の町から他方の終点（雇用の場）へ通う、また逆に通う場合を考える。エージェントは 2 つの町を繋ぐ経路を選択しなければならない。経路は 2 つの町を繋ぐ複数のリンク（道路）によって形成される。エージェントのペイオフを経路利用による時間的遅れによる負の負荷とする。経路利用による遅れは、経路を構成する各リンク（道路）からの遅れの合計である。1 つのリンクからの遅れは、それを利用するエージェントの数の関数として表される。混雑ゲームは道路混雑だけでなく、対称外部性を含むような分析にも用いられる。

混雑ゲームを定義する。 Γ は有限な数の施設（道路） γ_k の集合を表す。戦略 $i \in S^p$ は施設の部分集合 $\Gamma_i^p \subseteq \Gamma$ からなる。集合 $\rho^p(\gamma) = \{i \in S^p : \gamma \in \Gamma_i^p\}$ は施設 γ を必要とする S^p の

14) 証明は Sandholm (2009) を参照。

戦略を表す. 図 6.1 の輸送ネットワークの場合, $\Gamma = \{\gamma_k | k = 1, \dots, 15\}$ である. A から D に行く経路の 1 つは点 B を経由する道路 γ_1 と γ_{13} を利用する方法で, これを戦略 1 とするならば, $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \gamma_{13}\}$ になる

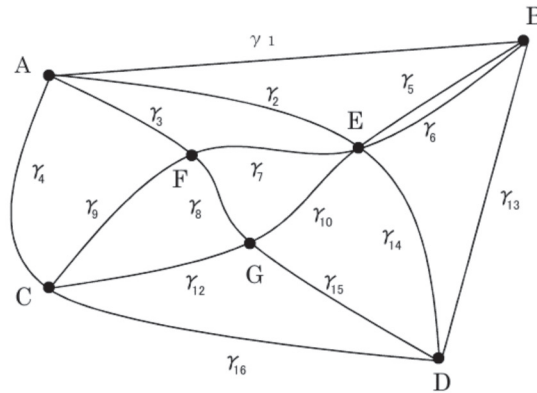


図 6.1 道路ネットワーク

各施設 γ の費用関数 $c_\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ とし, その変数は施設の利用レベル u_γ , すなわち, その施設を利用するエージェント・マスである.

$$u_\gamma(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in \rho^p(\gamma)} x_i^p.$$

つまり $u_\gamma(x)$ は施設 (道路) γ を使う利用者全体の利用水準を表す. 施設 (道路) γ での費用は $c_\gamma(u_\gamma(x))$ となる. 戦略 (経路) i のペイオフは, i で利用する各施設 (道路) $\gamma \in \Gamma_i^p$ から発生する費用を合計し, -1 を乗じたものである. すなわち

$$F_i^p(x) = - \sum_{\gamma \in \Gamma_i^p} c_\gamma(u_\gamma(x)).$$

である.

混雑はエージェントの追加による施設 (道路) 利用の変化という限界的効果によってとらえられる. 経路 $j \in S^q$ をとるエージェントは, 経路 $i \in S^q$ を選択するエージェントと共通に利用する道路 $\gamma \in \Gamma_i^p \cap \Gamma_j^q$ において混雑を限界的に拡大させ, エージェント i のペイオフに影響する. 逆に経路 $i \in S^q$ を選択するエージェントは, 経路 $j \in S^q$ をとるエージェントのペイオフに影響する. よってエージェント j がエージェント i のペイオフに及ぼす限界的影

響と、逆にエージェント i がエージェント j のペイオフに及ぼす限界的影响はまったく同じ、つまり、対称外部性が成り立つ。

$$\frac{\partial F_i^p}{\partial x_j^q}(x) = - \sum_{\gamma \in \Gamma_i^p \cap \Gamma_j^q} (u_\gamma(x)) = \frac{\partial F_i^q}{\partial x_i^p}(x)$$

混雑効果は完全ポテンシャル条件 (3.2) を満たすので、混雑ゲームは完全ポテンシャルゲームである。混雑費用 c_γ は利用水準 u_γ に依存する。利用水準 u_γ は x_i に依存するため、完全ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} f(x) &= - \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^{u_\gamma(x)} c_\gamma(z) \left\{ \frac{dz}{dx_1} dx_1 + \cdots + \frac{dz}{dx_n} dx_n \right\} \\ &= - \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^{u_\gamma(x)} c_\gamma(z) dz \end{aligned}$$

である。

命題 6.1 混雑ゲームは完全ポテンシャルゲームである。このとき混雑ゲームの完全ポテンシャル関数は

$$f(x) = - \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_0^{u_\gamma(x)} c_\gamma(z) dz$$

である。

一方、集計ペイオフは

$$\bar{F}(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in S^p} x_i^p F_i^p(x) = - \sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(x) c_\gamma(u_\gamma(x))$$

になり、ポテンシャルとの間には関連性は見られない。

6.2 混雑ゲームの性質

ここでは混雑ゲーム F が非減少な費用関数 c_γ をもつときの完全ポテンシャル関数を検討する。

命題 6.2 混雑ゲーム F が非減少な費用関数 c_γ をもち、完全ポテンシャル関数が f であるとする。もし $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \leq \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ ($j, k \neq i$) ならば、完全ポテンシャル関数 f を最大にする $x \in X$ の集合は凸である。さらに費用関数 c_γ が増加的であるならば、均衡は一意である。

証明 1. 完全ポテンシャル関数 $f(x)$ が凹関数であること。

関数 $f(x)$ のテーラー展開の 2 次の項を構成するヘッセ行列 H が負の半定符号ならば、関

数 $f(x)$ は凹関数である。まず、 $f(x)$ のヘッセ行列 H を求める。 $f(x)$ は完全ポテンシャル関数なので、 $F(x)_i = \partial f(x)/\partial x_i$ である。よってヘッセ行列 H は対称行列で

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & & \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & & \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

である。経路（戦略） i が使う施設（道路）の集合 Γ_i と経路（戦略） i と経路 j が使う施設の集合 $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ について $\Gamma_i \supseteq \Gamma_i \cap \Gamma_j$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} &= - \sum_{\gamma \in \Gamma_i} \frac{dc_\gamma(u_\gamma)}{du_\gamma} \leq - \sum_{\gamma \in \Gamma_i \cap \Gamma_j} \frac{dc_\gamma(u_\gamma)}{du_\gamma} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \leq 0, \\ \frac{\partial F_j}{\partial x_j} &= - \sum_{\gamma \in \Gamma_j} \frac{dc_\gamma(u_\gamma)}{du_\gamma} \leq - \sum_{\gamma \in \Gamma_j \cap \Gamma_i} \frac{dc_\gamma(u_\gamma)}{du_\gamma} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{aligned}$$

である。よって数学 A1 から、ヘッセ行列 H は負の半定符号である。以上から関数 $f(x)$ は凹関数である。

系 3.3 から混雑ゲーム F のナッシュ均衡解は X 上で完全ポテンシャル関数 f を最大にする x からなる凸集合である。さらに費用関数 c_γ が増加的であるならば、関数 f は強凹になる。よって、 f を最大にする費用水準に対して u_γ は一意に決まる。

■

等弾力的混雑ゲーム (Isoelastic Congestion Games)

F を費用関数 c_γ をもつ混雑ゲームとする。各施設 $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\eta_\gamma(u) = \frac{uc'_\gamma(u)}{c_\gamma(u)}$$

は η_γ の費用弾力性を表し、 $c_\gamma(u) \neq 0$ の場合に定義される。 η_γ は $\eta_\gamma(u) \geq 0$ である。もしすべて $\gamma \in \Gamma$ について $\eta_\gamma = \eta$ ならば、混雑ゲームは等弾力的 (isoelastic)、あるいは一定の弾力性 $\eta \in \mathbb{R}$ をもつという。等弾力的なケースは Γ のすべて施設の費用がすべての利用レベルで混雑への敏感さが等しいときといえる。等弾力性の場合、すべての費用関数は

$c_\gamma(u) = a_\gamma u^\eta$ と表現される．ここで a_γ は任意（すなわち、正数あるいは負数）のスカラールである．等弾力性の場合には、各 u_γ は x に関して線形なので各ペイオフ関数 F_i^p は x に関して η 次同次関数の和になる．よって

性質 6.3 弾力性 η の等弾力混雑ゲームは次数 η の同次ポテンシャルゲーム (homogeneous potential game) である．

性質 6.4 F は非減少アフィン費用関数： $c_\gamma(u) = a_\gamma u + b_\gamma$ をもつ混雑ゲームとする．各集団内では各ルートの固定費用 b^p は同一である：

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_i^p} b_\gamma = b^p \text{ for all } i \in S^p, p \in P$$

と仮定すると、そのとき $NE(F) = GE(F)$ である．

証明

費用関数 $c_\gamma(u)$ は非減少なので、 x_i, x_j が $F_i^p(x) = -\sum_{\gamma \in \Gamma_i^p} a_\gamma u(x) + b^p$ に及ぼす影響 $\partial F_i / \partial x_i$ と $\partial F_i / \partial x_j$ は

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\sum_{\gamma \in \Gamma_i^p} a_\gamma \leq 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -\sum_{\gamma \in \Gamma_i \cap \Gamma_j} a_\gamma \leq 0$$

である． $DF(x)$ のすべての成分が非正なので、命題 6.2 の証明から完全ポテンシャル関数 $f(x)$ は凹である．したがって $f(x)$ に極値をもたらす x はすべて最大値をもたらす．よって $GE(F) = KT(f)$ である． $KT(f) = NE(F)$ なので、 $GE(F) = NE(F)$ となる．

■

6.3 混雑ゲームの非効率性の境界

混雑ゲームが性質 6.3 を満たすならば、同次完全ポテンシャルゲームの定理 3.4 からナッシュ均衡 x は効率であることがわかる．けれども等弾力的混雑ゲームのような同次ポテンシャルゲームは稀である．たとえば、1 単位マスのドライバーの集団が 2 本の道路からなる交通ネットワーク利用するとき、道路 1 の費用関数が $c_1(u) = 1$ 、道路 2 の費用関数が $c_1(u) = u$ の場合、ナッシュ均衡は $(x_1, x_2) = (0, 1)$ であるが、すべてのドライバーの費用を集計した社会費用を最小にする社会状態をみると、 $(0.5, 0.5)$ であって、ナッシュ均衡の $(0, 1)$ ではない．¹⁵⁾ 同次ポテンシャルでない混雑ゲームのナッシュ均衡は社会費用を最小にする

15) Sandholm (2010) p. 69 を参照

ことはない．それゆえ混雑ゲームのナッシュ均衡がどれほど効率的であるのか、あるいはどれほど非効率的なのかが問題である．以下では非減少費用関数を伴う混雑ゲーム、言い換えると、混雑が強くなるほど混雑費用が高まるか、あるいは混雑が一定であるような混雑ゲームをとりあげ、その効率性を検討する．

施設 $\gamma \in \Gamma$ と非減少費用関数 c_γ のもとで、戦略 $i \in S^p$ の費用は

$$C_i^p(x) = -F_i^p(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_i^p} c_\gamma(u_\gamma(x))$$

と表され、状態 x での社会費用は

$$\bar{C}(x) = -\bar{F}(x) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{i \in S^p} x_i^p C_i^p(x) = -\sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(x) c_\gamma(u_\gamma(x))$$

となる．これから生じる C あるいは (C, m) (集団マスを強調するときに m を明示) としての混雑ゲームを検討する．施設 γ に関する別の費用関数 ψ_γ を導入するときには、 C を Ψ で置き換える．

均衡の非効率性を分析する 1 つのアプローチは、均衡社会的費用を追加エージェントを伴うゲームの最小社会費用と比べることである．

命題 6.5 C を非減少費用関数を伴う混雑ゲームとする． x^* を (C, m) のナッシュ均衡とし、 y を $(C, 2m)$ の実行可能な状態とする．そのとき $\bar{C}(x^*) \leq \bar{C}(y)$ である．

証明

(1) $\psi_\gamma(u) = \max \{c_\gamma(u_\gamma(x^*)), c_\gamma(u)\}$ によって費用関数 ψ_γ を定義する．はじめに

$$u(\psi_\gamma(u) - c_\gamma(u)) \leq c_\gamma(u_\gamma(x^*))u_\gamma(x^*) \quad (6.1)$$

を示す．

(i) $c_\gamma(u_\gamma(x^*)) < c_\gamma(u)$ ならば、定義により $\psi_\gamma(u) = c_\gamma(u)$ である．式 (6.1) の左辺 = 0 となり、右辺は正である．よって式 (4) は成立する．

(ii) $c_\gamma(u_\gamma(x^*)) \geq c_\gamma(u)$ ならば、 $\psi_\gamma(u) = c_\gamma(u_\gamma(x^*))$ である．式 (6.1) の左辺 - 右辺は

$$u(\psi_\gamma(u) - c_\gamma(u)) - c_\gamma(u_\gamma(x^*))u_\gamma(x^*) = c_\gamma(u_\gamma(x^*)) \{u - u_\gamma(x^*)\} - uc_\gamma(u) \leq 0$$

となる．関数 $c_\gamma(u)$ は u に関して非減少であり、 $c_\gamma(u_\gamma(x^*)) \geq c_\gamma(u)$ であるならば、 $u - u_\gamma(x^*) < 0$ である．よって (6.1) が成立つ．

(2) つぎに $\bar{\Psi}(\frac{y}{2}) \geq \bar{C}(x^*)$ を示す．

分布 $\frac{y}{2}$ と x にもとづく戦略 (経路) i の費用 $\Psi_i(\frac{y}{2})$ と $C_i(x^*)$ を比較する． y は集団マスが $2m$ 、 x^* は集団マスが m のときの分布なので、 $\sum_{i \in S} \frac{y_i}{2} = \sum_{i \in S} x_i^*$ である． x^* は (C, m) のナッシュ均衡なので、 $\Psi(\frac{y}{2}) \geq C(x^*)$ である．これから社会費用をもとめると

$$\bar{\Psi}\left(\frac{y}{2}\right) \geq \bar{C}(x^*) \quad (6.2)$$

になる.

(3) $\bar{\Psi}(y) - \bar{C}(y) \leq \bar{C}(x^*)$ と $\bar{\Psi}(y) \geq 2\bar{C}(x^*)$ を示す.

式 (6.1) を γ に関して合計すると、 $\sum_{\gamma \in \Gamma} u\psi_{\gamma}(u) - \sum_{\gamma \in \Gamma} uc_{\gamma}(u) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*))u_{\gamma}(x^*)$

$$\bar{\Psi}(y) - \bar{C}(y) \leq \bar{C}(x^*) \quad (6.3)$$

となる.

(i) $c_{\gamma}(u)$ が定値関数のとき、

$$\bar{\Psi}\left(\frac{y}{2}\right) = \sum_i \frac{y_i}{2} \Psi_i\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}(y)$$

である. 他方 (6.2) から $\bar{\Psi}\left(\frac{y}{2}\right) \geq \bar{C}(x^*)$ なので、 $\bar{\Psi}(y) \geq 2\bar{C}(x^*)$ となる.

(ii) $c_{\gamma}(u)$ が増加関数のとき、

$$\bar{\Psi}\left(\frac{y}{2}\right) = \sum_i \frac{y_i}{2} \Psi_i\left(\frac{y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \sum_i \Psi_i(y) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}(y)$$

である. よって (6.2) から $\bar{\Psi}\left(\frac{y}{2}\right) \geq \bar{C}(x^*)$ なので、 $\bar{\Psi}(y) \geq 2\bar{C}(x^*)$ となる.

以上 (i)、(ii) から

$$\bar{\Psi}(y) \geq 2\bar{C}(x^*) \quad (6.4)$$

である.

最後に、式 (6.3) と式 (6.4) から $\bar{\Psi}(y)$ を消去して、 $\bar{C}(x^*) \leq C(y)$ を得る.

■

さらに、つぎの命題が成り立つ.

命題 6.6

費用関数 $c_{\gamma}(u)$ が非減少であり、かつすべての $u \geq 0$ について $uc_{\gamma}(u) \leq \alpha \int_0^u c_{\gamma}(z)dz$ を満たすと仮定する. もし $x^* \in NE(C)$ かつ $x \in X$ ならば、 $\bar{C}(x^*) \leq \alpha \bar{C}(x)$ である.

証明

仮定より、 $x^* \in NE(C)$ についても

$$u_{\gamma}(x^*)c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) \leq \alpha \int_0^{u_{\gamma}(x^*)} c_{\gamma}(z)dz$$

が成り立つ. すべての $\gamma \in \Gamma$ について合計すると、

$$\bar{C}(x^*) = \sum_{\gamma \in \Gamma} u_{\gamma}(x^*) c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha \int_0^{u_{\gamma}(x^*)} c_{\gamma}(z) dz \quad (6.5)$$

となる．一方、費用関数 $c_{\gamma}(u)$ が非減少なので、

$$\int_0^{u_{\gamma}(x)} c_{\gamma}(z) dz \leq u_{\gamma}(x) c_{\gamma}(u_{\gamma}(x))$$

である．すべての施設（道路）について合計すると

$$\sum_{\gamma} \int_0^{u_{\gamma}(x)} c_{\gamma}(z) dz \leq \sum_{\gamma} u_{\gamma}(x) c_{\gamma}(u_{\gamma}(x)) = \bar{C}(x) \quad (6.6)$$

となる．式 (6.5) と (6.6) から $\bar{C}(x^*) \leq \alpha \bar{C}(x)$ が導かれる．

■

定理 6.7¹⁶⁾

費用関数 c_{γ} が非負、非減少のアフィン関数 $c_{\gamma}(u) = a_{\gamma} + b_{\gamma} u$ ($a_{\gamma}, b_{\gamma} \geq 0$) である混雑ゲームとする．もし $x^* \in NE(C)$ ならば、 $\bar{C}(x^*) \leq \frac{4}{3} \bar{C}(x)$ である．

系 6.8

C を費用関数 c_{γ} が非負、非減少かつアフィンである混雑ゲームとする． x^* を (C, m) のナッシュ均衡、 y を $(C, \frac{5}{4}m)$ の実行可能状態であるとする．そのとき $\bar{C}(x^*) \leq \bar{C}(y)$ となる．

証明

定理 6.7 の証明から、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) u_{\gamma}(y) \leq \bar{C}(y) + \frac{1}{4} \bar{C}(x^*) \quad \text{for any } x \in X \quad (6.7)$$

である．他方、集団規模が $\frac{5}{4}m$ の分布を y とする． $\frac{4}{5}y$ は集団規模が m の集団分布になる． x^* は m の集団分布なので、

$$\bar{C}(x^*) = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) u_{\gamma}(x^*) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) u_{\gamma}\left(\frac{4}{5}y\right)$$

となり、 $\frac{5}{4} \bar{C}(x^*) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} c_{\gamma}(u_{\gamma}(x^*)) u_{\gamma}(y)$ が得られる．この式と (6.7) から $\bar{C}(x^*) \leq \bar{C}(y)$ が導かれる．

■

16) Sandholm (2010) p70を参照

第6節では減少な費用関数をもつ混雑ゲームもとのナッシュ均衡を取り上げて、その社会費用の分析から明らかになったことは、簡単に次のようになる。、命題 6.5 から集団規模 m のナッシュ均衡の社会費用は、集団規模が $2m$ の社会費用より小さくなること、さらに系 6.8 からは、費用関数が非減少に加えアフィンであるならば、ナッシュ均衡の社会費用は集団規模が $\frac{5}{4}m$ の社会費用より小さくなることである。すでに Sandholm (2010) によって証明されている定理 6.7 からは、ナッシュ均衡の社会費用は同一規模 m の集団の（最小）社会費用の $\frac{4}{3}$ 倍になることがわかる。

7. おわりに

本研究ノートでは、第2節から第4節にかけて Sandholm(2010) によって定式化された集団ゲーム、完全ポテンシャルゲーム、ポテンシャルゲームを紹介すると同時にこれらのゲームの諸性質を掲載した。その後、第5節と第6節では集団ゲームのゲームの具体例としての正規形ゲームと混雑ゲームを取り上げ、完全ポテンシャルゲームの諸性質の証明をおこなった。

ここで確認した正規形ゲームと混雑ゲームの性質そのものは、Sandholm (2010) で証明が省略されていた完全ポテンシャルゲームとしての性質である。これらの性質の基本的な点としては、共通利害の正規形ゲームは完全ポテンシャルゲームであり、完全ポテンシャルと集計ペイオフ（社会的ペイオフ）の間には一定の関係が認められること、ナッシュ均衡状態であればそのとき最大の社会的ペイオフを達成することであった。次に混雑ゲームは、完全ポテンシャルゲームではあるけれども、一般には完全ポテンシャルと集計ペイオフの間には関係が認められない。ただしすべての施設（道路）利用から発生する費用について等弾力的な混雑があるような混雑ゲームの場合にのみ、完全ポテンシャルと集計ペイオフの間に一定の関係が認められることであった。本研究ノートで示した正規形ゲームと混雑ゲームに関する諸性質は、ゲーム的な状況にある社会的集団現象を理解するうえでの有効な手段であると考えられる。

数学注

A 1: n 次対称行列 A_n の対角成分が負でその他の成分がすべて非正であるとき、対角成分と非対角成分の関係が $a_{ij} \leq a_{ji} \leq 0$, $a_{ii} \leq a_{ji} \leq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), $a_{ii} \leq a_{ij} + a_{ik}$ ($i, k \neq j$) ならば、行列 A_n は負の半定符号である。

証明

帰納法により行列 A が負の半定符号であることを示す。

1) $k = 1$ のとき、明らかに $a_{11} \leq 0$ である。

2) $k = 2$ のとき、 $a_{ii} \leq a_{ij} \leq 0$ ($i, j = 1, 2$) なので A の 2 次主小行列式は

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0$$

である。

2) $k = n$ (偶数) のケースを調べる。 $k = n-1$ (奇数) のとき $k-1$ 次主小対称行列式 $\det \tilde{A}_{k-1} \leq 0$ が成立すると仮定して証明をおこなう。 n 次対称行列式 $\det A_n$ の符号を第 n 行展開して調べる。 このために $\det A_n$ の第 k -行の成分 $(n, 1)$ から $(n, n-1)$ までが 0 になるように、第 n 列を a_{in}/a_{nn} ($i = 1, \dots, n-1$) 倍して第 i 列から差し引く。

$$\begin{aligned} \det A_k &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-11} & & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - a_{n1} \frac{a_{1n}}{a_{nn}} & \dots & \dots & a_{1n-1} - a_{nn-1} \frac{a_{1n}}{a_{nn}} & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} - a_{n1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} & & a_{ii} - a_{ni} \frac{a_{in}}{a_{nn}} & a_{in-1} - a_{nn-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} - a_{n1} \frac{a_{n-1n}}{a_{nn}} & \dots & \dots & a_{n-1n-1} - a_{nn-1} \frac{a_{n-1n}}{a_{nn}} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

変形後の $n-1$ 次の主小行列式を \tilde{A}_{k-1} とすると、 $\det A_k$

$$\det A_k = (\det \tilde{A}_{k-1}) a_{kk}$$

になる。

$\det \tilde{A}_{k-1} \leq 0$ 示すことができれば、 $a_{kk} > 0$ なので $\det A_k \geq 0$ となって $k = n$ (偶数) のとき証明されたことになる。 以下では $\det \tilde{A}_{k-1} \leq 0$ であることを明らかにする。 \tilde{A}_{k-1} の対角成分 (i, i) とそれ以外の (i, j) との大小関係を比較すると、 $a_{ik}/a_{kk} \geq 1$ ($i = 1, \dots, k-1$) で $a_{ii} \leq a_{ij} \leq 0$, $a_{ii} \leq a_{ji} \leq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), $a_{ii} \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}$ なので、 (i, i) 成分は (i, j) 成分より小さい。 すなわち

$$\begin{aligned} \left(a_{ii} - a_{ki} \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) - \left(a_{ij} - a_{kj} \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) &= a_{ii} - a_{ij} - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) (a_{ki} - a_{kj}) \\ &\leq a_{ii} - a_{ij} - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \right) a_{ki} \leq 0 \end{aligned}$$

である。しかも \tilde{A}_{k-1} の (i, j) 成分と (j, i) 成分をみると、

$$a_{ij} - \frac{a_{kj}a_{ik}}{a_{kk}} = a_{ji} - \frac{a_{ki}a_{jk}}{a_{kk}} \leq 0 \quad (i, j = 1, \dots, k)$$

で、 \tilde{A}_{k-1} は対称行列である。よって仮定により $\det \tilde{A}_{k-1}$ の符号は非正である。 $a_{kk} < 0$ なので $\det A_n \geq 0$ である。 $k = n$ が奇数の場合には $\det A_n \leq 0$ であることが示される。 よって行列 A_n は負の半定符号である。 ■

参考文献

Maynard-Smith, J.(1974) The theory of games and the evolution of animal conflicts, *Journal of Theoretical Biology*, 47, 209-221.

Mondely D. and Shapley L.S.(1996) Potential Games, *Games and Economic Behavior*, 14, 124-143.

Sandholm, W.H.(2001) Potential Games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, 97, 81-108.

Sandholm, W.H.(2009) *Large Population Potential Games*, *Journal of Economic Theory*, 144, 1710-1725.

Sandholm, W.H.(2010) *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT press.

J.メイナード-スミス著、寺本 英、梯 正之 訳(1985)『進化とゲーム理論-闘争の論理-』、産業図書。