ネットワーク分断リスク下における ネットワーク効率性・安定性*

宇野木　広　樹**

要　　旨

本稿は Jackson and Wolinsky (1996) における connections model を，各ノードが独立に「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」,「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能を同時に一定確率で失うモデルへと拡張し，ネットワーク分断リスクの存在するネットワーク形成モデルを提示する。このモデルのもとでネットワークの効率性と安定性に関して分析を行う。最適化シミュレーターを用いて，complete ネットワーク，circle ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークをそれぞれ強効率的ネットワークとして導出する。ネットワーク安定性に関しては，complete ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークに関するペア安定性条件を導出する。また，ネットワーク安定性とネットワーク規模との関係について分析を行い，complete ネットワークではネットワークを構成するノード数が増えるとペア安定的となるリンク形成費用の範囲が縮小することを示す。

キーワード：ネットワーク分断，ノード機能喪失，ネットワーク安定性，ネットワーク効率性
JEL 区分：D85

＊本稿は日本経済学会 (2007 年 6 月)，日本応用経済学会 (2007 年 6 月)，福岡大学先端経済センター研究会(2007 年 7 月) で報告した内容に加筆・修正したものである。その際，松林伸夫 (慶應大学)，宍倉学 (長崎大学)，斎藤参郎 (福岡大学) の各氏から貴重な助言をいただいた。ここに記して感謝の意を表したい。なお，本稿における強効率的ネットワークのシミュレーション分析では，井上寛規氏 (熊本学園大学大学院経済学研究科) の協力により開発した最適化シミュレーターを利用した。井上氏にも謝意を表したい。
＊＊熊本学園大学大学院経済学研究科博士課程

はじめに

近年，ネットワークに関する分析は物理・数学・工学・社会学・生物学など，多岐の分野で盛んに行われてきている。経済学においては，各ノードがリンクを形成するか，もしくは形成しないかを戦略的に選択し，その結果ネットワークが形成される「ネットワーク形成ゲーム理論」と呼ばれる理論が存在する。本稿はこのネットワーク形成ゲーム理論における代表的な先行研究である Jackson and Wolinsky (1996) における connections model を，各ノードの「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」,「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能が一定確率で失われるモデルへと拡張する。

ネットワーク形成に関するゲーム理論的アプローチは，Jackson and Wolinsky (1996) 以降，多くの研究が蓄積されている。これらの研究は，各ノードが一方的にリンクを形成・分断できる Bala and Goyal (2000a) のモデルと，Jackson and Wolinsky (1996) において導入されているリンク形成が相互的合意の上で行われるモデルに大別される。

Jackson and Wolinsky (1996) は，同質的なノードが主体的に意思決定を行う静学的ネットワーク形成ゲームにおけるネットワークの効率性とペア安定性 (pairwise stability) を分析している。研究の中で，リンク形成費用とリンク形成利得の残存率との関係によって，効率的なネットワークと安定的なネットワークがそれぞれどのような形状になるのかを分析している。また，ネットワークの効率性と安定性が必ずしも両立しないことを明らかにしている。

次に Bala and Goyal (2000a) では，同質的なノードが相手との合意なしに一方的にリンクを形成・分断することができる動学的リンク形成モデルの分析を行っている。リンク形成利得がリンク費用を支出したノードにのみ発生する一方向モデル (one-way flow model) と，リンクが形成された際にリンク形成利得が双方のノードに発生する双方向モデル (two-way flow model) の 2 つのモデルについて，ネットワークの効率性やネットワークがナッシュ均衡となる条件について分析している。

また，異質的なノード間のネットワーク形成を分析した研究としては，Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006) が挙げられる。Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006) は，ノード間のリンク形成利得の違いはネットワークの連結性にとって重要であり，リンク形成費用の違いはネットワーク連結性のみならず個々のコンポーネントの構造に対して決定的な影響を及ぼすことを示している。

また，Bala and Goyal (2000b) は，ノード間に形成されるリンクが利得を伝達する信頼性に焦点をあて，効率的なネットワークとナッシュネットワーク (ネットワークがナッシュ均衡

となっている) の性質を分析している。分析の結果，もしも社会が大きくて，リンク形成費用がある適当な範囲にあるならば，ナッシュネットワークと効率的ネットワークはともに全てのリンクが冗長であるようなネットワークになることを示している。また，リンク形成費用が非常に高いか低い場合，もしくはリンクが利得を伝達する信頼性が高いならば，効率性と安定性はほぼ一致することを示している。しかしながら，リンク形成費用とリンクが利得を伝達する信頼性が中程度ならば，ナッシュネットワークは社会的に最適なネットワークと比べてリンク形成が過少になってしまうかもしれないことを示している。

Bala and Goyal (2000b) は，各リンクが必ずしも利得を伝達できるわけではなく，ネットワーク分断リスクを考慮したモデルとなっている。本稿もネットワーク分断リスクを考慮したモデルを提示するが，Bala and Goyal (2000b) は各リンクが利得を伝達できないことが原因によるネットワーク分断リスクを考えたが，本稿は各ノードが機能を失うことによるネットワーク分断リスクを考慮している。例えば，本稿が考慮している状況は，コンピューターネットワークにおいてサーバーがダウンすることで情報の伝達が分断されてしまうような状況である。

一方，複雑ネットワークの研究においても，ネットワークが分断されてしまうリスクを考慮した分析が行われている。Albert, Jeong and Barabasi (2000) は，各ノードがランダムに消滅するモデルにおいて，スケールフリーネットワーク (scale-free network)[1] と，ランダムネットワーク (exponential network)[2] の 2 つのネットワークを比較し，スケールフリーネットワークが非常に強い頑健性を持っていることを明らかにしている。スケールフリーネットワークの持つノードの消滅に対する頑健性は，各ノードが持つリンクの数が異なるベキ則に従うネットワークの特徴から来るものである。スケールフリーネットワークにおいては，大多数のノードが少数のリンクしか持っておらず，少数の数多くのリンクを持つハブノードがネットワークの連結に重要な役割を果たしている。よって，消滅するノードのほとんどがネットワーク連結に重要ではないノードであるため，スケールフリーネットワークはランダムにノードが消滅する状況において非常に強い頑健性を持つ。一方，スケールフリーネットワークは特定のノードを狙った攻撃には脆い事も指摘してあり，ネットワークにおいて重要な役割を果たしているノー

---

1) k 個のリンクを持つノードの確率密度を $p(k)$ とすると，その確率密度は $p(k) \sim k^{-\gamma}$ で表されるベキ則に従うネットワークである。ここで，γ はベキ指数と呼ばれ，多くのスケールフリーネットワークが 2〜3 のベキ指数を持つことが知られている。また，自然界に存在する複雑なネットワークのほとんどはベキ則に従うことが明らかになっている。例えば，ワールド・ワイド・ウェブや細胞内のネットワーク等もベキ則に従う。

2) 各ノードが他のノードと一定確率でリンクを形成するネットワーク。ほぼすべてのノードは近似的に同数のリンクを持つ。

ドを見極め，それら複数を同時に攻撃することでネットワークは簡単に崩壊してしまうことを示した。

　このようにネットワーク分析においてアプローチが異なる研究分野が存在しているが，これらの研究分野を比較すると次のような特徴が見受けられる。複雑ネットワーク分析の分野では，「どのように (どのような)」ネットワークが形成されるのかを分析するにあたっては非常に優れているが，「なぜ」ネットワークが形成されるのか，そしてどのようなネットワークが効率的であるのかを判断することができない。しかしながら，このような複雑ネットワーク分析の分野におけるウィークポイントはネットワーク形成ゲーム理論の強みでもある。ネットワーク形成ゲーム理論は，ネットワークを評価し，あるネットワークがなぜ導出されるのかを理解するためのフレームワークを提供する。しかしながら，ネットワーク形成ゲーム理論は予測されるネットワークはあまりにも単純な構造であるので，そのネットワークが効率的であるか否かを分析することはできるが，ネットワークがどのような度数分布を持つのかを推測するのは困難である。すなわち，「どのように (どのような)」ネットワークが形成されるのかを分析する点において複雑ネットワーク分析よりも有効なアプローチではないのである[3)]。

　よって本稿ではネットワーク形成ゲーム理論アプローチと複雑ネットワーク分析的アプローチを組み合わせたモデル構築を行う。ネットワーク形成ゲーム理論アプローチとしては，Jackson and Wolinsky(1996)における connections model を用い，複雑ネットワーク分析的アプローチとしては，Albert, Jeong and Barabasi (2000) における各ノードがランダムに消滅する設定を取り入れ，ノードの「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」，「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能が同時に一定確率で失われるネットワーク形成ゲームモデルを提示する。本稿の構成は次の通りである。第 1 節では，Jackson and Wolinsky (1996) で示された connections model のフレームワークを概説する。第 2 節において，各ノードが独立にノードの「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」，「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能を同時に一定確率で失うモデルを示す。第 3 節にてネットワーク効率性の分析とネットワーク安定性に関する分析を行う。

---

3)　詳しくは Jackson (2005) の pp. 44−45 を参照。また，Jackson (2005) では複雑ネットワーク分析とネットワーク形成ゲーム理論分析のアプローチは補完的であるので，これらのアプローチを組み合わせることで有益な結果を得ることができるかもしれないと述べている。

1　ネットワーク形成ゲーム理論

ネットワーク形成ゲーム理論は，国際貿易における自由貿易協定の締結分布の予見[4)]や，最適な航空路線ネットワークの決定などの分析に適した実用的なフレームワークである。ネットワーク形成ゲーム理論における代表的研究である Jackson and Wolinsky (1996) では，各プレイヤーが新しいリンクを形成するか，それとも現在存在しているリンクを断ち切るのかを判断する状況下において，ネットワークの効率性と安定性について分析している。

1. 1　Connections model

Jackson and Wolinsky (1996) における connections model を説明すると次のようになる。n 人のプレイヤーが存在し，各プレイヤーは自分以外のプレイヤーとリンクを結ぶことにより便益を得ることができる。しかしながら，リンクを形成するにはそれなりのコストが必要となるため，各プレイヤーは自分の利得を最大にするようにリンクを形成してゆく。ネットワークから得られる便益とその形成費用に応じて，様々な形状のネットワークが形成されることになる。ここで，具体的にプレイヤーの集合を $N=\left\{1, \ldots, n\right\}$ とし，プレイヤー集合 N における異なる 2 つの要素からなる (順序付けられていない) ペアをリンクと呼ぶ。プレイヤー i とプレイヤー $j(\neq i)$ との間に形成されたリンクは ij と記すことにする。リンクの集合 G をネットワークと呼び，形成可能な全てのリンクを要素として持つリンクの集合を g^N と記すことにする。ここで，形成可能な全てのネットワークは G^N の部分集合として表現される。このネットワーク G^N は全てのプレイヤー間にリンクが形成されており complete ネットワークと呼ばれる。

いま，ネットワーク G における任意のプレイヤー i の利得 $U_i(G)$ を次式で表すことにする。

$$U_i(G)=\sum_{j\neq i}\delta^{t_{ij}}w_{ij}-\sum_{j:ij\in g}c_{ij} \qquad (0<\delta<1).$$

$\sum_{j\neq i}\delta^{t_{ij}}w_{ij}$ はネットワーク G から得られる利得の合計，$\sum_{j:ij\in g}c_{ij}$ は直接リンクを形成した場合にかかるコストの総額である。ここで，w_{ij} はプレイヤー i がプレイヤー j から得られるリンク形成利得であり，$w_{ij}\geq 0$ であるとする。また，c_{ij} はプレイヤー i とプレイヤー j との間に形成された直接リンクの形成費用であり，$c_{ij}=c_{ji}>0$ であるとする。もしも直接リンクを形成し

4)　Konishi and Furusawa (2005) では，ネットワーク形成ゲームのフレームワークで 2 国間のトランスファーがなければ国際間の自由貿易ネットワークはペア安定的ではないことなどを示している。

ないならばコストは 0 である。また，δ はリンク形成利得残存率であり，$\delta^{t_{ij}}$ における指数部分の t_{ij} は，プレイヤー i からプレイヤー j (またはプレイヤー j からプレイヤー i) へとリンク形成利得が伝達される際に経由するリンク数の最小数である。ここでリンク形成利得残存率とは，リンク形成利得の価値がリンクからリンクへと伝達される際にどの程度伝達されるのかを表すものである。プレイヤー i とプレイヤー j との間に直接リンクが形成されている場合は $t_{ij}=1$ であり，間接リンクによってプレイヤー i とプレイヤー j がつながっている場合は $t_{ij}\geq 2$ となる。また，プレイヤー i とプレイヤー j との間に間接リンクが形成されておらずリンク形成利得の伝達が行われない場合は $t_{ij}=\infty$ であるとする。$\delta\in(0,1)$ なので，t_{ij} が大きくなるとそのようなリンクを通じて得られる利得は小さくなる。

次に，ネットワーク G におけるネットワーク価値は，全てのプレイヤー利得の合計として以下のように定義される。

$$W(G)=\sum_{i\in N}U_i(G).$$

代表的なネットワークとして，以下の 3 つのネットワークが存在する。

図 1：star ネットワーク，complete ネットワーク，empty ネットワーク

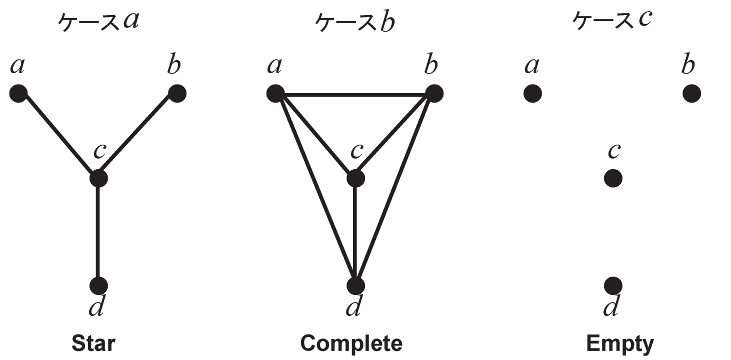


図 1 のケース a のように，ネットワークの中心であるハブプレイヤーが他のすべてのプレイヤーとリンクを形成し，その他のプレイヤーはハブプレイヤー以外とはリンクを形成しないネットワークを star ネットワーク (スター型ネットワーク) という。ケース b のようにすべてのプレイヤー同士が直接リンクを形成しているネットワークを complete ネットワーク (完全ネットワーク) という。また，ケース c のようにリンクが全く存在しないネットワークを empty ネットワーク (空ネットワーク) という。

1.2　ペア安定性と強効率性

次に，Jackson and Wolinsky (1996) におけるネットワークの効率性と安定性を示す概念であるペア安定性と強効率性を以下に示す。ここで，$G-ij$ はネットワーク G からリンク ij を削除したネットワークを表し，$G+ij$ はネットワーク G にリンク ij を追加したネットワークを表すものとする。また，ここで示すペア安定性と強効率性の定義は，第 2 節において提示するネットワーク分断リスクが存在するネットワーク形成モデルにおけるペア安定性と強効率性の定義としても用いることが出来る。

【ペア安定性】

(ⅰ)　任意の $ij \in G$ に関して，$U_i(G) \geq U_i(G-ij)$ かつ $U_j(G) \geq U_j(G-ij)$ である。

(ⅱ)　任意の $ij \notin G$ に関して，$U_i(G) < U_i(G+ij)$ ならば $U_j(G) > U_j(G+ij)$ である。

ペア安定性の定義における (ⅰ) は，ネットワーク G において任意のリンク ij を取り除くと，そのリンク ij を結んでいたプレイヤー i，j の利得がともに減少するかもしくは変わらないことを述べている。一方，ペア安定性の定義における (ⅱ) は，ネットワーク G に新たなリンク $ij \notin G$ を付け加えたとき，プレイヤー i の利得が上昇するならば，プレイヤー j の利得は減少しなければならないことを述べている。

ここで，ペア安定性が複数のプレイヤーが複数のリンクを追加もしくは削除する状況を考慮してもネットワークが維持されるようなネットワーク安定性を表す概念として十分ではない事を述べておく。第 1 に，ペア安定性は一度に 1 つのリンクが削除もしくは追加されることのみしか考慮しておらず，複数のリンクを削除もしくは追加することでプレイヤーの利得が増加する状況を考慮していない。第 2 に，ペア安定性は一度に高々一組のペアによってリンクが削除もしくは追加される状況のみしか考慮しておらず，複数のペアがリンクを再構築することで全てのプレイヤーたちが今までよりも大きな利得を得る状況を考慮していない。これら 2 点から，ペア安定性はネットワークが安定的であるための必要条件ではあるが十分条件ではない。しかしながら，ペア安定性はモデルにおいて導入が容易であるという特徴を持ち，安定的なネットワークの集合に関する精密な予測を行うのに有用である。

【強効率性】

$G \subset G^N$ が任意の $\dot{G} \subset G^N$ に対し $W(G) \geq W(\dot{G})$ であるならば，G は強効率的である。

いいかえれば，強効率的なネットワークから得られるネットワーク価値はあらゆるネットワークのネットワーク価値の中で最大となっているということである。

以下に Jackson and Wolinsky (1996) における効率性と安定性に関する命題を紹介しておく[5)]。

【命題１】 (強効率的なネットワーク)

ⅰ．$c<\delta-\delta^2$ ならば，強効率的ネットワークは complete ネットワーク G^N ただ 1 つである。

ⅱ．$\delta-\delta^2<c<\delta+(n-2)\delta^2/2$ ならば，強効率的ネットワークは単一からなる star ネットワーク G^* ただ 1 つである。

ⅲ．$\delta+(n-2)\delta^2/2<c$ ならば，強効率的ネットワークは empty ネットワーク G^E ただ 1 つである。

【命題２】 (ペア安定的なネットワーク)

ⅰ．ペア安定的ネットワークは高々 1 つの empty でないコンポーネントを持つ。

ⅱ．$c<\delta-\delta^2$ のとき，唯一のペア安定的ネットワークは complete ネットワーク G^N である。

ⅲ．$\delta-\delta^2<c\leq\delta$ のとき，単一からなる star ネットワーク G^* はペア安定的ネットワークであるが，必ずしも唯一のペア安定的ネットワークというわけではない[6)]。

ⅳ．$\delta<c$ のとき，empty ネットワークではないあらゆるペア安定的ネットワークは各プレイヤーが少なくとも 2 つのリンクを形成しており，そのネットワークは強効率的ネットワークではない[7)]。

命題 1 と命題 2 から，complete ネットワークについては強効率性とペア安定性が両立するが，star ネットワークや empty ネットワーク等に関しては強効率性とペア安定性が必ずしも両立しないことがわかる。

5)　以下の命題 1，命題 2 では，各ノードは同質であり，$c_{ij}=c$, $w_{ij}=1$，ノード数は n であると仮定する。また，命題 1，命題 2 の証明は Jackson and Wolinsky (1996) を参照。

6)　たとえば，$n=4$ で，$\delta-\delta^2<c<\delta-\delta^3$ ならば，circle ネットワーク (もしも $g\neq\phi$ であり，$g=\{i_1i_2,\ i_2i_3,\dots,i_{n-1}i_n,\ i_ni_1\}$ であるような $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}\subset N$ が存在するならば，その $g\subset g^N$ を circle ネットワークと呼ぶ) も star ネットワークと同様にペア安定的なネットワークであり，また $n=4$ で，$\delta-\delta^3<c<\delta$ であるとき，line ネットワーク (もしも $g\neq\phi$ であり，$g=\{i_1i_2,\ i_2i_3,\dots,i_{n-1}i_n\}$ であるような $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}\subset N$ が存在するならば，その $g\subset g^N$ を line ネットワークと呼ぶ) もまたペア安定的なネットワークである。

7)　$\delta<c$ のとき empty ネットワークはペア安定的であるが，唯一のペア安定的なネットワークというわけではない。

2　ノード機能が失われるネットワーク形成ゲーム理論

現実のネットワークにおいては，ネットワークが何かしらの原因によって分断されてしまう状況が起こる。例えば，コンピューターネットワークにおいてサーバーがダウンし，情報の伝達が分断されてしまう状況が起こる。このことはノードをコンピューターサーバー，情報の流れをリンクとして捉えると，「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」，「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つのノードの機能が失われたためにネットワークが分断されたと考えることができる。よって，本節では，Jackson and Wolinsky (1996) における connections model を，各ノードが独立に「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」，「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能を同時に一定確率で失われるモデルへと拡張し，ネットワーク分断リスクの存在するネットワーク形成モデルを提示する。

2. 1 モデル

いま，ネットワークにおけるノードの集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とし，$n\geq 3$ であり有限である。ノード集合 N における異なる 2 つの要素からなる順序付けられていないペアをリンクと呼ぶ。ノード i とノード $j\neq i$ との間に形成されたリンクは ij と記すことにする。ノードが形成するリンクの集合を L とし，ネットワークを $G\equiv(N,L)$ で定義する。形成可能なすべてのリンクを要素として持つネットワークを G^N とし，$G\subset G^N$ である。ここで，G^N はすべてのリンクが形成されているので complete ネットワークを示すものとして用いることにする。

本稿において，各ノードは「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」，「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能を同時に確率 $\alpha\in(0,1)$ で失い，ノード機能喪失確率 α は各ノードにおいて独立で同一であるとする。ここで，ノードが機能を失ったとしても，リンクはそのまま維持されており，リンク形成費用はノード機能が失われたとしても支払われるものとする。よって，複数のノードが機能を失ったとしても，ネットワークの形状は変化しない。ただし，ノード機能が失われることでネットワークの形状は変化しないが，各ノードのネットワークから得る利得は変化する。

いま，G を所与として，ノードが z 個機能を失うことで実現されるネットワークを潜在ネットワークと呼び，代表的潜在ネットワークを g_z^a と記すことにする。ノードが z 個機能を失った潜在ネットワーク g_z^a の集合を $G_z=\{g_z^1,\ldots,g_z^{{}_nC_z}\}$ と定義する。ここで，G_z における潜在ネットワークの数 $|G_z|$ は n 個のノードのうち z 個機能を失う組合せの総数であるので

$|G_z|={}_nC_z=n!/z!(n-z)!$ となる。また，ノード機能を失ったノードの集合を $Z\left(g_z^a\right)$ とし，機能を失ったノードの数を $z\leq n$ とする。一方，機能を失っていないノード集合を $I\left(g_z^a\right)$ とする。

ノードはネットワーク G を所与として，ハブノードとサブノードの 2 種類に大別されるものとし，ハブノードはリンクを 2 本以上持つノードであり，サブノードはそれ以外のノード (すなわち，1 本のリンクを形成しているか，もしくはリンクを形成していないノード) であるとする。ネットワーク G を所与として，ハブノードの集合を $H(G)=\left\{h_1, h_2, \ldots, h_m\right\}$，ハブノードの数を m，サブノードの集合を $S(G)=\left\{s_1, \ldots, s_{n-m}\right\}$ とする。ハブノード h_i と直接リンクを形成しているサブノードの数を $k_i\leq n-1$，リンクを形成していないサブノートの数を b と記す。ここで，ハブノードとサブノードの合計はノードの総数に等しいので，$n=\sum_{i=1}^{m}k_i+b+m$ となる。

ノードが z 個機能を失う場合，任意の潜在ネットワーク g_z^a の実現確率 $P\left(g_z^a\right)\in(0, 1)$ は以下のようになる。

$$P\left(g_z^a\right)=\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}. \tag{1}$$

また，ノードが z 個機能を失う状況において，ハブノードが y 個機能を失い，サブノードが $z-y$ 個機能を失う潜在ネットワーク $g_{z,y}^a$ の実現確率は以下のようになる。

$$P\left(g_{z,y}^a\right)=\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_mC_y\times{}_{n-m}C_{z-y}.$$

ここで，${}_mC_y$ は m 個のハブノードのうち y 個が機能を失う組合せであり，${}_{n-m}C_{z-y}$ は $n-m$ 個のサブノードのうち $z-y$ 個が機能を失う組合せである。潜在ネットワーク g_z^a にて，ノードが機能を失う事でリンクは存在しているがノードからの利得の伝達がないため，ノード間の利得の伝達を行う機能を果たせなくなるリンクが生じる。リンクの両端のノードのうちどちらか一方のノードが機能を失ってしまうと，このリンクはまったく機能を果たせず，無用のリンクとなる。リンクの両端のノードが機能を失っていないリンクの集合を $L\left(g_z^a\right)=\left\{ij|i,\ j\in I\right\}$ と定義する。

以下に本稿における重要な定義を記述する。

【定義１】 (経路)

ネットワーク G におけるノード i_1 とノード i_n とをつなぐ経路 $l_{i_1i_n}(G)$ とは，$\left\{i_1i_2, i_2i_3, \ldots, i_{n-1}i_n\right\}\subset L$ であるようなノード集合 $l_{i_1i_n}(G)=\left\{i_1, i_2, \ldots, i_n\right\}\subset N$ である。また，潜在ネットワーク g_z^a におけるノード i_1 とノード i_n とをつなぐ経路 $l_{i_1i_n}\left(g_z^a\right)$ とは，$\left\{i_1i_2, i_2i_3, \ldots, i_{n-1}i_n\right\}\subset L\left(g_z^a\right)$ であるようなノード集合 $l_{i_1i_n}\left(g_z^a\right)=\left\{i_1, i_2, \ldots, i_n\right\}\subset I\left(g_z^a\right)$ である。

【定義２】（コンポーネント）

いま，$N(G)=\{i\in N|\exists j\in N \text{ s.t. } ij\in G\}$ であるとしよう。以下を満たす $G'\subset G$ はネットワーク G のコンポーネント (component) である。

(ⅰ) $i\neq j$ であるような任意の $i, j\in N(G')$ に関して，i と j とをつなぐ経路 $l_{ij}(G')$ が G' に存在する。

(ⅱ) 任意の $i, j\in N(G')$ に関して，$ij\in G$ ならば $ij\in G'$ である。

【定義３】 (minimally connected network)

ネットワーク G が単一のコンポーネントから構成されており，そのコンポーネントに存在する任意のリンクを１つでも削除するとネットワーク G が単一のコンポーネントでなくなってしまうならば，そのネットワーク G は minimally connected network である。

つまり，$n-1$ 本のリンクを持つ単一のコンポーネントからネットワーク G が構成されているネットワークのことである。例えば，単一のコンポーネントからなる star ネットワークや line ネットワーク[8)]は minimally connected network である。

2.2　ノードの期待利得とネットワーク価値

いま，G を所与とした，潜在ネットワーク g_z^a におけるノード i の得る利得 $U_i\left(g_z^a\right)$ は以下で定義されるものとする。

$$U_i\left(g_z^a\right)=P\left(g_z^a\right)\left(\sum_{j\neq i:j\in l_{ij}\left(g_z^a\right)} w_{ij}\left(g_z^a\right)-\sum_{j\neq i:ij\in L} c_{ij}\right).$$

ここで，$w_{ij}\left(g_z^a\right)$ はノード i が潜在ネットワーク g_z^a においてノード j から得ることのできるリンク形成利得であり，$w_{ij}\left(g_z^a\right)\geq 0$ であるとする。$w_{ij}\left(g_z^a\right)$ を獲得するためにはノード i，j 間において経路 $l_{ij}\left(g_z^a\right)$ が存在していなければならない。ただし，ノード i，j 間において複数の経路が存在する場合，便宜上，最短経路のみからリンク形成利得 $w_{ij}\left(g_z^a\right)$ は伝達され，他の経路からはリンク形成利得 $w_{ij}\left(g_z^a\right)$ は伝達されないものとする。ここで，$\sum_{j\neq i:j\in l_{ij}\left(g_z^a\right)} w_{ij}\left(g_z^a\right)$ はノード i が潜在ネットワーク g_z^a から得るネットワーク利得であり，もしも潜在ネットワーク g_z^a においてノード i がノード機能を失っている場合は，ネットワークから利得を得ることが出来ないので $\sum_{j\neq i:j\in l_{ij}\left(g_z^a\right)} w_{ij}\left(g_z^a\right)=0$ であるとする。また，c_{ij} はノード i，j 間に形成されている

8)　もしも $G\neq\phi$ であり，$N=\left\{i_1, i_2, \ldots, i_n\right\}$ であり，$L=\left\{i_1 i_2, i_2 i_3, \ldots, i_{n-1} i_n\right\}$ であるネットワーク G が構成されているならば，その $G\subset G^N$ を line ネットワークと呼ぶ。

リンク $ij \in L$ のリンク形成費用であり，$c_{ij}=c_{ji}>0$ であるとする。もしも直接リンクを形成しないならばコストは 0 である。また，$\sum_{j\neq i:ij\in L} c_{ij}$ はノード i が拠出するリンク総形成費用である。すなわち，ノード i の得る利得 $U_i\left(g_z^a\right)$ は，潜在ネットワーク g_z^a から得るネットワーク利得からリンク総形成費用を差引いたものを潜在ネットワーク g_z^a の実現確率 $P\left(g_z^a\right)$ でウェイト付けしたものである。

潜在ネットワーク g_z^a におけるネットワーク価値 $W\left(g_z^a\right)$ を以下で定義する。

$$W\left(g_z^a\right)=\sum_{i=1}^{n} U_i\left(g_z^a\right).$$

すなわち，各ノードが潜在ネットワーク g_z^a から得る利得の合計である。

ここで，潜在ネットワーク g_z^a はノードが z 個機能を失うことで実現される潜在的ネットワーク集合 G_z における 1 つの要素に過ぎない。よって，ノードが z 個機能を失う場合にノード i が得る利得 $U_i(G_z)$ は以下で与えられるものとする。

$$U_i(G_z)=\sum_{a=1}^{{}_nC_z}\left[P\left(g_z^a\right)\left(\sum_{j\neq i:j\in l_{ij}\left(g_z^a\right)} w_{ij}\left(g_z^a\right)-\sum_{j\neq i:ij\in L} c_{ij}\right)\right].$$

本稿では，ネットワーク G におけるノード i が得る期待利得 $U_i(G)$ は，実現され得る全ての潜在ネットワークから得られる利得を合計したものとし，ネットワーク G のネットワーク価値 $W(G)$ は，全てのノードがネットワーク G から得る期待利得の合計として定義する。

$$\begin{aligned} U_i(G) &= \sum_{z=0}^{n} U_i(G_z) \\ &= \sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\left(\sum_{j\neq i:j\in l_{ij}\left(g_z^a\right)} w_{ij}\left(g_z^a\right)\right)\right]-\sum_{j\neq i:ij\in L} c_{ij}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$W(G)=\sum_{i=1}^{n} U_i(G) \tag{3}$$

ここで，(2) 式のネットワーク G から得られるネットワーク期待利得を現す左辺第 1 項において，機能を失うノードの数が $n-2$ の場合までしか考慮されていない理由は，ノードが $n-1$ 個以上機能を失うとどのノードも利得を得ることが出来ないからである。

図 2 は 3 個のノードから構成されるネットワークにおけるノード機能喪失の全組合せを示している。図 2 において，破線で描かれているノードは機能を失ったノードである。

図 2：3 個のノードから構成されるネットワークにおけるノード機能喪失の全組合せ

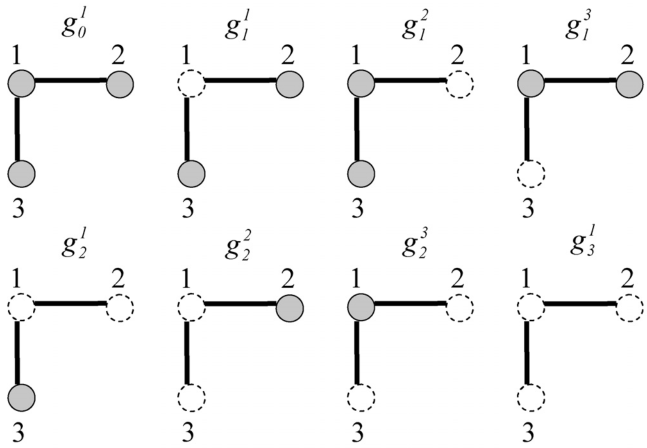


図 2 において，各ノードのリンク形成利得を w，リンク形成費用を c とし，それぞれの潜在ネットワークのネットワーク価値を求めると以下のようになる。

$$W\left(g_0^1\right)=(1-\alpha)^3\times\left[(2w-2c)+(2w-c)+(2w-c)\right]=(1-\alpha)^3(6w-4c).$$

$$W\left(g_1^1\right)=\alpha(1-\alpha)^2\times\left[(0-2c)+(0-c)+(0-c)\right]=-4\alpha(1-\alpha)^2c.$$

$$W\left(g_1^2\right)=\alpha(1-\alpha)^2\times\left[(w-2c)+(0-c)+(w-c)\right]=2\alpha(1-\alpha)^2(w-2c).$$

$$W\left(g_1^3\right)=\alpha(1-\alpha)^2\times\left[(w-2c)+(w-c)+(0-c)\right]=2\alpha(1-\alpha)^2(w-2c).$$

$$W\left(g_2^1\right)=\alpha^2(1-\alpha)\times\left[(0-2c)+(0-c)+(0-c)\right]=-4\alpha^2(1-\alpha)c.$$

$$W\left(g_2^2\right)=\alpha^2(1-\alpha)\times\left[(0-2c)+(0-c)+(0-c)\right]=-4\alpha^2(1-\alpha)c.$$

$$W\left(g_2^3\right)=\alpha^2(1-\alpha)\times\left[(0-2c)+(0-c)+(0-c)\right]=-4\alpha^2(1-\alpha)c.$$

$$W\left(g_3^1\right)=\alpha^3\times\left[(0-2c)+(0-c)+(0-c)\right]=-4\alpha^3c.$$

$$\therefore W(G)=2w(1-\alpha)^2\left[3(1-\alpha)+2\alpha\right]-4c.$$

3　ネットワーク効率性と安定性

本節では，前節で示したネットワーク分断リスクの存在するネットワーク形成モデルのもとでネットワークの効率性と安定性に関する分析を行う。ここで，ネットワーク効率性に関する分析は最適化シミュレーターを用いることにする。また，最適化シミュレーターによって強効

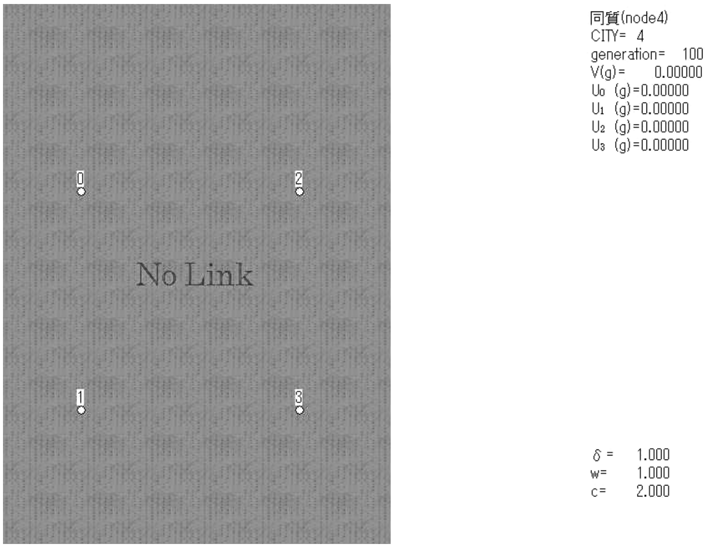
率的ネットワークとして導出される complete ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークのペア安定性に関して分析を行う。また，complete ネットワークに関するペア安定性とネットワークを構成するノードの数との関係性を分析する。

3. 1　ネットワーク効率性

前節にて定義したネットワーク価値関数を用いて強効率的なネットワークの導出を解析的に行うことは非常に困難である。よって，最適化シミュレーターを用いて強効率的ネットワークを導出する。分析にあたって，各ノードは同質であるとし，任意のノード i, j 間において $w_{ij}\left(g_z^a\right)=w$, $c_{ij}=c$ であるとする。

いま，$n=4$, $\alpha=0.1$, $c=2.0$, $w=1.0$ であるときの強効率的ネットワークを求めると，図 3 のような empty ネットワークが導出される。

図 3 : 強効率的ネットワークである empty ネットワーク

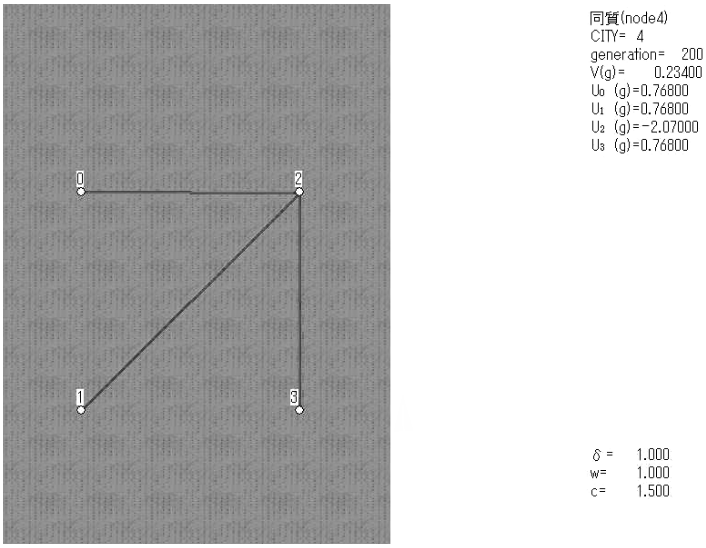


また，$n=4$, $\alpha=0.1$, $c=1.5$, $w=1.0$ として強効率的ネットワークを求めると，図 4 のような star ネットワークが導出される [9)]。

---

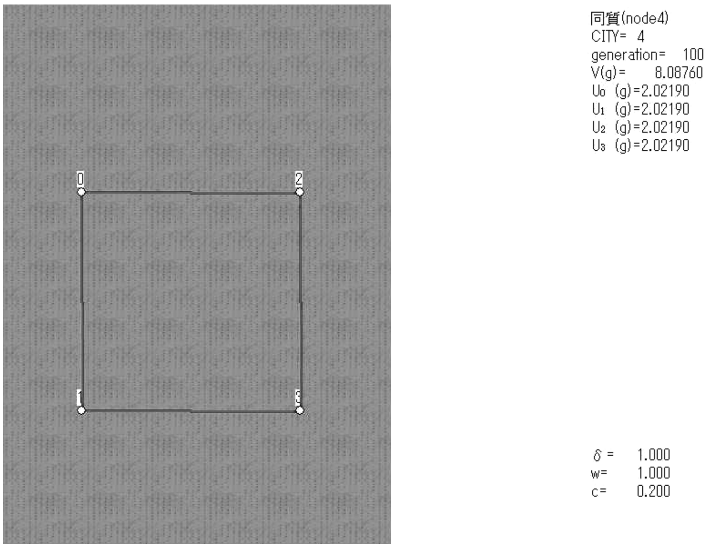
9)　Bala and Goyal (2000a) では，ノードが同質でネットワーク利得減耗のない状況では，強効率的ネットワークは minimally connected network となることが示されている (Bala and Goyal (2000a) の命題 4.3 を参照)。このことは，minimally connected network 間でのネットワーク価値に差異はないことを示唆しているが，本稿では minimally connected network において，star ネットワークのネットワーク価値が最も高くなる。

図 4 : 強効率的ネットワークである star ネットワーク



次に，$n=4, \alpha=0.1, c=0.2, w=1.0$ として強効率的ネットワークを求めると，図 5 のような circle ネットワーク[10] が導出される。

図 5 : 強効率的ネットワークである circle ネットワーク

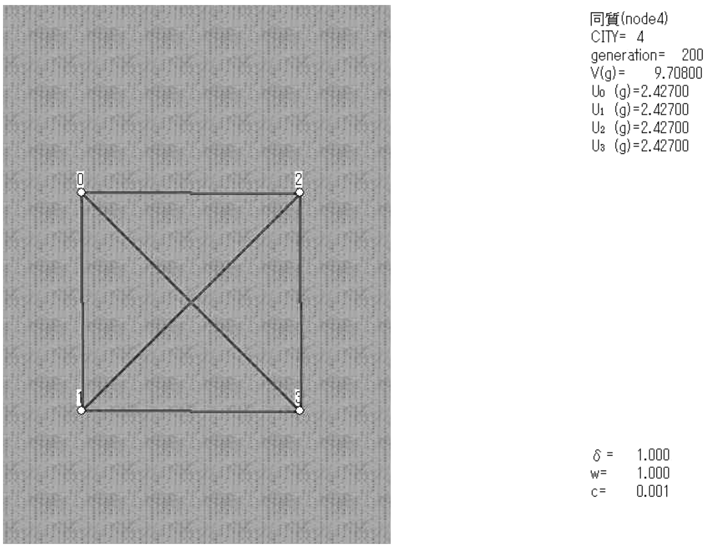


10) 本稿において，circle ネットワークとは，次の定義を満たすネットワークである。もしも $G \neq \phi$ であり，$N=\left\{i_1, i_2, \ldots, i_n\right\}$ であり，$L=\left\{i_1 i_2, i_2 i_3, \ldots, i_{n-1} i_n, i_n i_1\right\}$ であるネットワーク G が構成されているならば，その $G \subset G^N$ を circle ネットワークと呼ぶ。

Jackson and Wolinsky (1996) の connections model では circle ネットワークが強効率的ネットワークとして導出されることはない。このように circle ネットワークが強効率的ネットワークとなることは，本稿がネットワーク分断リスクを考慮したネットワーク形成モデルであることに起因する。Minimally connected network は任意のノード間において経路は高々 1 つであるため，ハブノードが機能を失ってしまうとネットワークが分断されてしまう。たとえば，star ネットワークにおいてはハブノードは 1 つしか存在しておらず，そのハブノードが機能を失うとネットワークが崩壊してしまう。しかし，図 4 の circle ネットワークは任意のノード間に経路が 2 つ存在しているため，ネットワークにおける 1 つのハブノードが機能を失ってもリンク形成利得を各ノードへ伝達する経路が存在している。すなわち，star ネットワークに比べて circle ネットワークはネットワーク分断リスクに対して強いということである。また，ネットワーク分断リスクを考慮している先行研究の Bala and Goyal (2000b) でも，十分にリンク形成費用が低い場合には，任意のノード間において複数の経路が存在するようなネットワークが効率的ネットワークとなることが示されている。

また，$n=4$, $\alpha=0.1$, $c=0.001$, $w=1.0$ であるときの強効率的ネットワークを求めると，図 6 のような complete ネットワークが導出される。

図 6 : 強効率的である complete ネットワーク



ここで，リンク形成利得減耗がないにもかかわらず，十分にリンク形成費用が低い場合には complete ネットワークが circle ネットワークよりもネットワーク価値が高くなることは興味

深いことである。この事は，complete ネットワークは circle ネットワークよりも各ノードが多くのリンクを形成しており，各ノードへリンク形成利得が伝達される経路が多いことに起因している。この経路の複数性により，complete ネットワークは複数のノードが機能を失っても circle ネットワークと比べてネットワークが分断されにくく，ネットワーク分断リスクに対して強いという特徴を持つ。よって，十分にリンク形成費用が低い場合，complete ネットワークが強効率的ネットワークとなるのである。

以下に，complete ネットワークの強効率性に関する命題を導出する。また，命題 3 以降の分析では，全てのノードは同質であり，$w_{ij}(g_z^a)=1, c_{ij}=c$ であるとする。

【命題 3】 $c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2$ ならば，complete ネットワーク G^N は強効率的ネットワークである。

証明）いま，complete ネットワーク G^N において以下が成立しているとする。

$$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2. \tag{4}$$

complete ネットワークにおいて，任意のノード i, j 間のリンク $ij \in G^N$ が価値を持つ状況は，ノード i とノード j とをつなぐ経路がリンク $ij \in G^N$ のみになる場合である。よって，ノード i とノード j 以外の全てのノードが機能を失った場合（つまり $n-2$ 個のノードが機能を失っている），complete ネットワーク G^N においてノード i, j 間に他に経路は存在しない。よって，complete ネットワーク G^N における任意のリンク $ij \in G^N$ のリンク価値は以下のようになる。

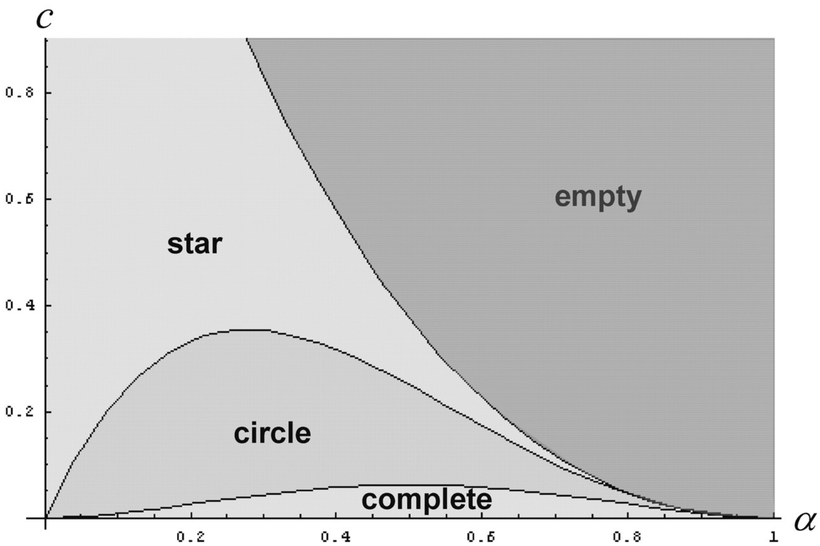
$$W(G^N) - W(G^N - ij) = 2\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2 - 2c.$$

このリンク $ij \in G^N$ のリンク価値は (4) 式のもとで正の値をとる。また，このリンク $ij \in G^N$ のリンク価値は形成し得るリンクの中で最も低い。よって，(4) 式のもとでは，あらゆるリンクが価値を持つため，全てのノード間にリンクを形成することが効率的である。よって，(4) 式のもとで complete ネットワークは強効率的となる。

Q. E. D.

図 7 は $n=4$ であるときに任意の c と α に関してどのようなネットワークが強効率的となるのかを図示したものである。

図 7： $n=4$ である時の強効率的ネットワーク



3.2　ネットワーク安定性

ここからは，最適化シミュレーターによって強効率的ネットワークとして導出されることが確認された complete ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークのペア安定性に関して分析をおこなう。

以下の命題 4 は complete ネットワークのペア安定性に関するものである。

【命題４】 $c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2$ ならば complete ネットワーク G^N はペア安定的である。

証明）complete ネットワークのペア安定性を示すためにはペア安定性の(ｉ)にのみ注目すればよい。いま，complete ネットワーク G^N において以下が成立しているとする。

$$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2. \tag{5}$$

complete ネットワークにおいて，ノード i, j 間のリンク $ij \in G^N$ が削除されたとしても，ノード i とノード j とをつなぐ経路のひとつが削除されたに過ぎず，存在している他の経路を通じて利得が伝達されるため，ノード i, j の利得は変化しない。しかしながら，ノード i とノード j 以外の全てのノードが機能を失った場合 (つまり $n-2$ 個のノードが機能を失っている)，ネットワークにおいてノード i とノード j とをつなぐ経路は存在せず，ノード i, j はともに利得を得ることができなくなってしまう。よって，complete ネットワーク G^N において，ノード i, j 間のリンク $ij \in G^N$ を削除したときのノード i, j の期待利得の変化はそれぞれ以下のようになる。

$$U_i(G^N)-U_i(G^N-ij)=\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2-c,$$
$$U_j(G^N)-U_j(G^N-ij)=\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2-c.$$

ここで，(5) 式より，任意のノード i, j に関して次のことが成立する。

$$U_i(G^N)-U_i(G^N-ij)\geq 0,\ U_j(G^N)-U_j(G^N-ij)\geq 0.$$

すなわち，このことはペア安定性の（ⅰ）に相当する。complete ネットワークにおいて新たにリンクは形成できないのでペア安定性の（ⅱ）を考慮する必要はない。よって，(5) 式のもとで complete ネットワーク G^N はペア安定的となることが証明された。

Q. E. D.

次に star ネットワークのペア安定性に関する分析を行う。

【命題５】 $\sum_{z=1}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-3}C_{z-1}\right]<c<\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\times(n-1-z)\right]$ ならば，

star ネットワーク G^* はペア安定的である。

証明）いま，star ネットワーク G^* において以下のことが成立しているとする。

$$\sum_{z=1}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-3}C_{z-1}\right]<c<\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\times(n-1-z)\right]. \qquad (6)$$

ハブノード i とそれ以外のサブノード j に関して，リンク $ij\in G^*$ を削除したときの期待利得の変化を考える場合，ハブノード i はサブノード j から得られる利得が失われるだけなのに対し，サブノード j はネットワークから利得を全く得ることができなくなってしまう事に注意しなければならない。リンク $ij\in G^*$ を削除したときのハブノード i の期待利得の変化に関して，自分とサブノード j 以外の $n-2$ 個のノードの中から z 個のノードが機能を失う状況を考えなければならない。一方，サブノード j の期待利得の変化に関しては，自分とハブノード i を除く $n-2$ 個のノードの中から z 個のノードが機能を失う状況を考えなければならない。よって，ハブノード i とそれ以外の任意のサブノード j に関して，リンク $ij\in G^*$ を削除したときの期待利得の変化はそれぞれ以下のようになる。

$$U_i(G^*)-U_i(G^*-ij)=\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\right]-c,$$
$$U_j(G^*)-U_j(G^*-ij)=\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\times(n-1-z)\right]-c.$$

ここで，リンク $ij\in G^*$ を削除したときのハブノード i と任意のサブノード j の期待利得の変化に関して以下のことが成立する。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\right]<\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\times(n-1-z)\right].$$

(6) 式より，ハブノード i とそれ以外の任意のノード j に関して

$$U_i(G^*)-U_i(G^*-ij)>0,\ U_j(G^*)-U_jGg^*-ij)>0.$$

が成立する。このことはペア安定性の(ｉ)を満たす。

次に任意のサブノード j とサブノード $k\neq j$ に関して，リンク $jk\not\subseteq G^*$ が追加された場合を考える。このリンク jk から任意のサブノード j とサブノード k が追加的に利得を得られるのは，ハブノード i が機能を失い，サブノード j, k がともに機能を失っていない状況である。つまり，サブノード j, k を除く $n-2$ 個のノードの中から，ハブノード i とその他の $z-1$ 個のノードが機能を失う状況 ($n-3$ 個のノードの中から $z-1$ 個のノードが機能を失う状況) を考えればよい。このとき，サブノード j はサブノード k からのみ利得を得ることができ，同様にサブノード k はサブノード j からのみ利得を得ることができる。よって，リンク $jk\notin G^*$ が追加された場合におけるサブノード j とサブノード k の期待利得の変化は以下のようになる。

$$U_j(G^*)-U_j(G^*-jk)=\sum_{z=1}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-3}C_{z-1}\right]-c,$$

$$U_k(G^*)-U_k(G^*-jk)=\sum_{z=1}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-3}C_{z-1}\right]-c.$$

(6) 式より，以下のことが成立する。

$$U_j(G^*)-U_j(G^*-jk)<0,\ U_k(G^*)-U_k(G^*-jk)<0.$$

以上から，ペア安定性の(ⅱ)が満たされる。よって，(6) 式が満たされるとき star ネットワーク G^* はペア安定的であることが証明された。

Q. E. D.

【命題６】 $\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\right]<c$ ならば，empty ネットワーク G^E はペア安定的である。

証明) empty ネットワーク G^E のペア安定性を示すためにはペア安定性の(ⅱ)にのみ注目すればよい。いま，empty ネットワークにおいて以下が成立しているとする。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z}\times{}_{n-2}C_z\right]<c. \tag{7}$$

任意のノード i, j 間に $ij\notin G^E$ を追加した場合，ノード i, j が利得を得ることができる状況は，ノード i とノード j がともに機能を失わない場合である。つまり，サブノード i, j を除く

$n-2$ のノードの中から，z 個のノードが機能を失う状況である。また，その際に得ることのできる利得はノード i, j ともにノード 1 個分の利得である。よって，任意のノード i, j 間に $ij \notin G^E$ を追加した場合のノード i, j の期待利得の変化はそれぞれ次のようになる。

$$U_i(G^E) - U_i(G^E + ij) = -\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z} \times {}_{n-2}C_z\right] + c,$$

$$U_j(G^E) - U_j(G^E + ij) = -\sum_{z=0}^{n-2}\left[\alpha^z(1-\alpha)^{n-z} \times {}_{n-2}C_z\right] + c.$$

(7) 式より，任意のノード i, j に関して以下のことが成立する。

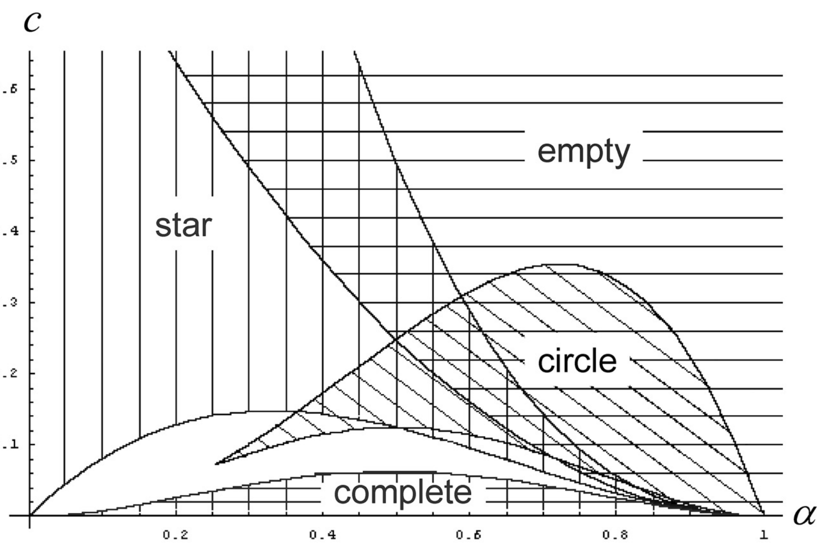
$$U_i(G^E) - U_i(G^E + ij) > 0,\ U_j(G^E) - U_j(G^E + ij) > 0.$$

すなわち，任意のノード i, j は新たにリンクを形成しようとしない。このことはペア安定性の (ⅱ) を満たすのに十分である。よって，(7) 式のもとで empty ネットワーク G^E がペア安定的である事が証明された。

Q. E. D.

図 8 は $n=4$ であるときに任意の c と α に関してどのようなネットワークがペア安定的となるのかを図示したものである。

図 8：$n=4$ である時のペア安定的ネットワーク



次の命題 7 は，complete ネットワークのペア安定性と強効率性の同時達成に関する分析である。

【命題 7】$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2$ ならば complete ネットワーク G^N はペア安定的であり強効率的である。

証明）いま，complete ネットワーク G^N に関して，命題 3 と命題 4 から，complete ネットワークのペア安定条件と強効率条件は以下のようになる。

(G^N のペア安定条件)	(G^N の強効率条件)
$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2.$	$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2.$

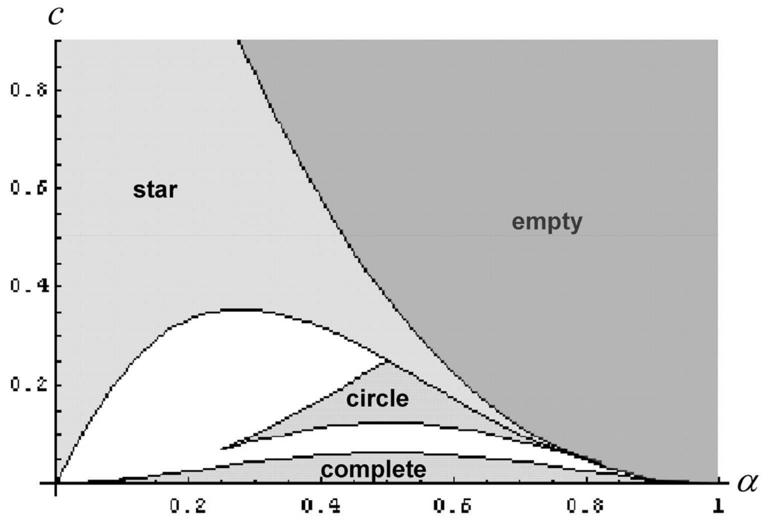
すなわち，complete ネットワークのペア安定条件と強効率条件は同じであり，$c \leq \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2$ のとき常に complete ネットワークのペア安定性と強効率性は達成される。

Q. E. D.

命題 7 で示したとおり，本稿では complete ネットワークに関して強効率性とペア安定性が常に両立するが，ネットワーク分断リスクを考慮している先行研究の Bala and Goyal (2000 b) では，必ずしも効率的ネットワークがナッシュ均衡にならない。ネットワーク安定性とネットワーク均衡との概念の違いがあるものの，命題 7 は本稿と Bala and Goyal (2000 b) との明確な相違点である。

図 9 は $n=4$ であるときに任意の c と α に関して，complete，circle，star，empty ネットワークがペア安定的と強効率性を同時に達成する領域を図示したものである。

図 9：$n=4$ である時のペア安定性・強効率性同時達成領域



3.3　ネットワーク安定性とネットワーク規模

これまではネットワークがどのような条件の下でペア安定的となるのかを分析してきたが，以下の命題 8 は，ペア安定性とネットワークを構成するノードの数との関係性を分析する。

【命題 8】 任意の $\alpha\in(0, 1)$ に関して，ノードの数が少ない complete ネットワークほどペア安定的となるリンク形成費用の範囲は広い。

証明）いま，ノードの数は $n\geq 3$ であるとし，n 個のノードからなる complete ネットワーク $G^N_{(n)}$ と，$n+1$ 個のノードから構成される complete ネットワーク $G^N_{(n+1)}$ のペア安定性の条件を考える。

命題 4 より，ネットワーク $G^N_{(n)}$ とネットワーク $G^N_{(n+1)}$ のペア安定性の条件はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} (G^N_{(n)}\text{ のペア安定条件}) & (G^N_{(n+1)}\text{ のペア安定条件}) \\ c\leq\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2. & c\leq\alpha^{n-1}(1-\alpha)^2. \end{array}$$

$G^N_{(n)}$ と $G^N_{(n+1)}$ のペア安定条件の上限をそれぞれ $\bar{c}^N_n$, $\bar{c}^N_n$ とし，それらを比較すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{c}^N_n-\bar{c}^N_{n+1}&=\alpha^{n-2}(1-\alpha)^2-\alpha^{n-1}(1-\alpha)^2 \\ &=\alpha^{n-2}(1-\alpha)^3>0. \end{aligned}$$

この関係は任意の $n\geq 3$ に対して成り立つので，$\bar{c}^N_n>\bar{c}^N_{n+1}>\bar{c}^N_{n+2}>\cdots$ となる。また，任意の $n\geq 3$ に対して，$G^N_{(n)}$ と $G^N_{(n+1)}$ のペア安定条件の下限をそれぞれ $\underline{c}^N_n$, $\underline{c}^N_{n+1}$ とすると，$\underline{c}^N_n=\underline{c}^N_{n+1}=0$ である。よって，任意の $\alpha\in(0, 1)$ に関してノードの数が少ない complete ネットワークほどペア安定的となるリンク形成費用の範囲は広いということが証明された。

Q. E. D.

ここで，命題 7 から complete ネットワークに関してペア安定性と強効率性は常に同時達成されることが分かっている。よって，命題 8 はあるリンク形成費用のもとで complete ネットワークが強効率的でペア安定的であったとしても，ネットワークにおけるノードの数が増加すると，complete ネットワークの強効率性とペア安定性は失われてしまうことが分かる。いいかえると，命題 8 はネットワークの規模が大きくなればなるほど complete ネットワークの効率性と安定性は達成されにくくなることを示している[11)]。このことは，リンク形成費用を所

---

11)　Bala and Goyal (2000 b) においてもネットワーク規模が効率的ネットワークと均衡ネットワークに与える影響を示しており，各ノード間に複数の経路が存在するネットワークに関して，ネットワークの規模が大きくなればなるほどネットワークの効率性とネットワークの均衡はともに実現されやすく

与として，complete ネットワークにおいて強効率性とペア安定性を達成するようなネットワークの最適規模が存在することを示しており，ネットワーク効率性と安定性の分析と同時に，ネットワーク効率性と安定性をともに達成するネットワーク最適規模を分析する必要性と分析可能性を示唆している。

おわりに

本稿では，Jackson and Wolinsky (1996) における connections model を，ノードの持つ「リンクを通じてリンク形成利得を他のノードへ伝達する」,「ネットワークを通じて利得を得る」という 2 つの機能が一定確率で失われるモデルへと拡張した。このモデルのもと，ネットワークの効率性と安定性に関する分析を行った。ネットワーク効率性に関しては，complete ネットワークに関する強効率性条件を導出し，また最適化シミュレーターを用いて，complete ネットワーク，circle ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークをそれぞれ強効率的ネットワークとして導出した。ネットワーク安定性に関しては，complete ネットワーク，star ネットワーク，empty ネットワークに関するペア安定性条件を導出した。また，complete ネットワークに関して，ペア安定性とネットワークを構成するノード数との関係について分析を行った。complete ネットワークに関して，ネットワークを構成するノード数がペア安定性の条件に影響を与えることが確認され，リンク形成費用を所与として，complete ネットワークにおいてペア安定性と強効率性を同時達成するようなネットワーク最適規模が存在することを示した。

最後に課題を述べておく。今回の分析では，ネットワーク効率性に関して complete ネットワーク以外のネットワークに関して解析的な分析を行っておらず，ノードの数が 4 個であるときの強効率的ネットワークを確認するにとどまっている。ネットワーク効率性に対してノード数がどのように影響するのかを分析するためにも，解析的に分析を行う必要がある。また，ネッ

なることが示されている。いま，n はネットワークにおけるノードの数，c はリンク形成費用，p はリンクが利得を伝達する確率を表しているとする。そのとき，Bala and Goyal (2000 b) において，各ノード間に複数の経路が存在するネットワークの均衡条件として，$p\left(1-p^{n/2}\right)>c$ が示されている (命題 3.3)。また，各ノード間に複数の経路が存在するネットワークの効率性条件として，$2p\left(1-p^{n/2}\right)>c$ が示されている (命題 4.3)。上記の均衡条件と効率性条件の左辺部分は n が増加すると大きくなる。このことは，ネットワークに存在するノードの数が多くなれば各ノード間に複数の経路が存在しているネットワークが均衡する，もしくは効率的となるリンク形成費用の領域が拡大することを示唆しており，各ノード間に複数の経路が存在するネットワークの効率性と均衡が達成されやすくなることを示唆している。

トワーク安定性に関しては，circle ネットワークのペア安定性条件を導出しておらず，分析の余地が残っている。また，ネットワーク安定性を示す概念としてペア安定性は十分なものではないため，他のネットワーク安定性の概念を用いて分析を行う必要もある。そして，ネットワーク効率性と安定性以外に，ネットワーク最適規模に関する分析も今後の大きな課題である。

参 考 文 献

[1] Bala, V., Goyal, S., (2000a) “A Non-cooperative Model of Network Formation”, *Econometrica*, vol. 68, pp. 1181−1229.

[2] Bala, V., Goyal, S., (2000b) “A Strategic Analysis of Network Reliability”, *Review of Economic Design,* vol. 5, pp. 205−228.

[3] Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J., (2006) “Network Formation with Heterogeneous Players”, *Games and Economic Behavior*, vol. 54, pp. 353−372.

[4] Jackson, M. O., (2005) “The Economics of Social Networks”, *Social Science Working Paper*, 1237.

[5] Jackson, M. O., Wolinsky, A., (1996) “A Strategic Model of Social and Economic Networks”, *Journal of Economic Theory*, vol. 71, pp. 44−74.

[6] Konishi, H., Furusawa, T., (2005) “Free Trade Networks with Transfers”, *Japanese Economic Review*, vol. 56, pp. 144−164.

[7] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabasi (2000) “Error and Attack Tolerance of Complex Networks,” *Nature*, vol. 406, pp. 378−382.

[8] 宇野木 広樹「ネットワーク分断リスクとネットワークの効率性・安定性」2007 年度日本経済学会春季大会報告論文.

[9] 宇野木 広樹「ネットワーク分断リスク下におけるネットワーク最適規模」2007 年度日本応用経済学会春季大会報告論文.

宇野木　広　樹

Summary

Network efficiency and stability in network division risk

This paper expands on the connections model in Jackson and Wolinsky (1996) to the model that each node independently loses two functions both “the transmission of payoff to other nodes through the link” and “the reception of payoff through the network” simultaneously at a constant probability. Under this model, we analyze network efficiency and stability by first, computing the strongly efficient network such as complete network, circle network, star network and empty network. Following this we show pairwise stability conditions of a complete network, a star network and an empty network. Moreover, we analyze the relationship between the network stability and the network scale. As a result of the analysis, the range of the link formation cost in which the complete network is pairwise stable is reduced by increasing the number of nodes that exist in the network.

Keywords: Network division risk, Loss of node function, Network stability, Network efficiency.

JEL Classification: D85